Comité Estatal de la OMM Veracruz
Facultad de Matemáticas UV
Xalapa-Enríquez, Ver.

Problemas de Olimpiadas de Matemáticas, Veracruz 2013

Problemas de Olimpiadas de Matemáticas Veracruz 2013.

Mélida Carranza Trejo
Raquiel Rufino López Martínez
Víctor Pérez García
Brenda Tapia Santos
Porfirio Toledo Hernández

Problemas de Olimpiadas de Matemáticas, Veracruz 2013.

Mélida Carranza Trejo
Raquiel Rufino López Martínez
Víctor Pérez García
Brenda Tapia Santos
Porfirio Toledo Hernández

Problemas de Olimpiadas de Matemáticas, Veracruz 2013.

Primera edición 2013

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra bajo cualquier medio sin la autorización por escrito de los titulares de la misma.

D.R. © Mélida Carranza Trejo
Raquiel Rufino López Martínez
Víctor Pérez García
Brenda Tapia Santos
Porfirio Toledo Hernández

© IETEC-Arana Editores
Av. Adolfo Ruiz Cortines N° 511
Col. Francisco Ferrer Guardia, C.P. 91020
Xalapa, Veracruz, México
01 (228) 8 14 18 73
edimpa.arana@hotmail.com

ISBN: 978-607-9091-40-8

Impreso y hecho en México.

Índice general

Prólogo . . . 1

1. Exámenes Veracruz . . . 5
1.1. 17a OVMAES Etapa Zona . . . 5
1.2. 17a OVMAES Etapa Estatal Intermodalidades . . . 6
1.3. 26a OMM Estado de Veracruz . . . 7
1.4. 26a OMM Selectivo Estado de Veracruz . . . 8

2. Problemas de Entrenamiento . . . 11

3. Examen Nacional . . . 23
3.1. Primer Día . . . 23
3.2. Segundo Día . . . 24

4. Soluciones Exámenes Veracruz . . . 27
4.1. 17a OVMAES Etapa Zona . . . 27
4.2. 17a OVMAES Etapa Estatal Intermodalidades . . . 29
4.3. 26a OMM Estado de Veracruz . . . 32
4.4. 26a OMM Selectivo Estado de Veracruz . . . 39

5. Soluciones Problemas de Entrenamiento . . . 45

6. Soluciones Examen Nacional . . . 107
6.1. Primer Día . . . 107
6.2. Segundo Día . . . 115

7. Definiciones y Resultados Básicos . . . 127
7.1. Geometría . . . 127
7.1.1. Ángulos . . . 127
7.1.2. Semejanza de Triángulos . . . 128
7.1.3. Paralelogramos . . . 132
7.1.4. Puntos y Rectas en los Triángulos . . . 133
7.1.5. Ángulos en las Circunferencias . . . 136
7.1.6. Cuadriláteros Cíclicos . . . 137
7.1.7. Potencia . . . 138
7.2. Teoría de Números . . . 139

7.2.1. Divisibilidad. 139
7.2.2. Factorización en números primos. 141
7.2.3. Algoritmo de Euclides. 142
7.2.4. Mínimo Común Múltiplo 144
7.2.5. Congruencias 144
7.3. Combinatoria 146
7.3.1. Conteo 146
7.3.2. Teorema del Binomio de Newton 148
7.3.3. Principio de Casillas 149
7.3.4. Gráficas 150

Bibliografía **150**

Índice Alfabético **152**

Prólogo

Una de las grandes fortalezas de las matemáticas es el hecho de ser uno de los campos más fértiles para desarrollar la capacidad de razonamiento, a través de la adquisición de diferentes habilidades del pensamiento lógico, como son: argumentación de ideas, búsqueda de pautas y patrones, detección de analogías, capacidad de abstracción, reflexión, generalización, análisis y comparación, entre otras; impactando de manera positiva en el desarrollo humano de los estudiantes.

Para fomentar, desarrollar y evaluar las habilidades del pensamiento antes mencionadas, se han creado concursos de matemáticas para jóvenes estudiantes, que tienen gran tradición en varios países del mundo, por ejemplo en Francia los concursos generales se realizan desde el siglo XVIII y en Hungría las competencias Eótvos desde 1894.

En la actualidad el concurso más importante que se lleva a cabo es la Olimpiada Internacional de Matemáticas, efectuada por primera vez en 1959 en Rumania, con la participación de Hungría, la URSS, Bulgaria, Polonia, Checoslovaquia y la República Democrática Alemana. A partir de entonces este concurso se ha celebrado anualmente, participando en los años recientes alrededor de cien países de todos los continentes, teniendo como objetivo:

- Descubrir, estimular y desafiar a los jóvenes con talento matemático en todos los países.
- Fomentar las relaciones internacionales amistosas entre los matemáticos de todos los países.
- Crear una oportunidad para el intercambio de información sobre planes de estudio y prácticas escolares en todo el mundo.
- Promover las matemáticas en general.

Con respecto a nuestro país en el año 1987 la Sociedad Matemática Mexicana organizó por primera vez la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM), que además de compartir los objetivos de la Olimpiada Internacional tuvo como fines propios:

- Detectar alumnos que tengan habilidades en las matemáticas, para estimularlas y potenciarlas.

- Ayudar a los jóvenes a fortalecer su intelecto, imaginación y creatividad.
- Fomentar el estudio de las matemáticas.
- Establecer un ámbito de encuentro para docentes, donde sea posible intercambiar experiencias sobre la enseñanza de esta disciplina.
- Promover el mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas proporcionando a maestros y alumnos nuevos incentivos y perspectivas.
- Fomentar publicaciones formativas en el ámbito de las matemáticas destinadas a los alumnos del bachillerato.

Es importante resaltar que la OMM fomenta y estimula el estudio de las matemáticas como una disciplina del pensamiento que desarrolla la inteligencia del estudiante mediante métodos de razonamiento estructurado, deductivo y creativo.

Desde el año 1987 se ha realizado anualmente la OMM en nuestro país, teniendo como sede diversos estados de la República Mexicana. El programa Básico de la olimpiada se desarrolla en cuatro etapas:

1. **Concurso Estatales.** Los estados organizan de manera independiente el concurso de olimpiada y seleccionan a sus representantes.
2. **Concurso Nacional.** Cada uno de los estados asiste con sus seis representantes para participar en la etapa nacional.
3. **Entrenamiento y selección de las delegaciones que representan a México en Olimpiadas internacionales.** Los dieciséis mejores concursantes son entrenados por el Comité Nacional de la Olimpiada por un periodo aproximado de seis meses con la finalidad de seleccionar a los mejores que representaran a México en la etapa internacional, entre otros concursos.
4. **Participación en olimpiadas internacionales.**

Cabe destacar que el primer concurso nacional se efectuó en la ciudad de Xalapa durante la celebración del XX Congreso de la Sociedad Mexicana de Matemáticas en el mes de noviembre de 1987.

En relación al estado de Veracruz, la Facultad de Matemáticas ha sido desde un inicio la responsable de organizar la etapa estatal a través de un Comité de Olimpiada en donde participan cada uno de los subsistemas de educación media.

Previo a la fase estatal cada subsistema establece sus propios criterios de selección para conformar a la delegación que los representará en la fase estatal. Esta última se lleva a cabo en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Veracruzana el primer sábado de junio. Una vez realizada dicha fase se premia a los 6 primeros, 6 segundos y 6 terceros lugares, quienes conformarán la preselección del Estado de Veracruz.

A los estudiantes preseleccionados se les brinda una serie de entrenamientos, impartidos por profesores y alumnos de la Facultad de Matemáticas,

con la finalidad de capacitarlos en los siguientes temas: álgebra, geometría, combinatoria y teoría de números, haciendo hincapié en la resolución de problemas tipo olimpiada.

Los entrenamientos se calendarizan los viernes y sábados cada quince días, pudiendose incluir estancias de hasta una semana en la ciudad de Xalapa; dichos entrenamientos se realizan en fechas previas al Concurso Nacional. Se evalúa el desempeño de cada uno de los estudiantes preseleccionados y en septiembre se aplica un examen selectivo para elegir a los seis alumnos que conformarán a la delegación que representará al Estado de Veracruz en la etapa Nacional.

Basta con simplemente buscar en Internet Olimpiadas de Matemáticas para darse cuenta de que existe una gran diversidad de material que sirve como apoyo para preparar y entrenar a jóvenes estudiantes que desean participar en concursos de matemáticas; en este rubro el Comité Nacional de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha hecho un gran labor publicando libros, folletos y actualmente editando de manera periódica la revista Tzaloa. Esta misma labor se observa en comités de otros países e incluso en comités estatales. En el Estado de Veracruz, aunque cada año se entrena arduamente a la Delegación Veracruz que representará al Estado en la Etapa Nacional de la OMM, no se cuenta con material generado por el Comité Estatal. Como respuesta a lo anterior, hemos decidió elaborar un libro que sirva de apoyo para preparar a nuestros estudiantes.

Este libro se presenta en forma de problemario y está constituido de la siguiente manera: en el Capítulo 1 se enuncian los problemas de algunos exámenes aplicados en el Estado de Veracruz durante el año 2012; entre ellos están un examen de la Etapa Zona y el examen de la Etapa Estatal Intermodalidades de la 17ª Olimpiada Veracruzana de Matemáticas para Alumnos de Educación Secundaria (OVMAES); se incluyen también los problemas del Concurso Estatal de la 26ª OMM y finalmente el examen Selectivo que se utilizó para conformar la Delegación Veracruz. El Capítulo 2 consta de una lista de problemas que se utilizaron en los entrenamientos de la Delegación Veracruz en el año 2012. En el Capítulo 3 se presentan los problemas del Concurso Nacional de la 26ª OMM, el cual se desarrolla en dos días. Los Capítulos 4, 5 y 6 constan de las soluciones a los problemas planteados en los Capítulos 1, 2 y 3, respectivamente. Finalmente, el Capítulo 7 trata de algunos conceptos básicos de geometría, teoría de números y combinatoria con la finalidad de que se tengan los conocimientos mínimos para entender el material del libro.

Comité Estatal de la OMM Veracruz.
Xalapa-Enríquez, Ver.

Capítulo 1

Exámenes de Concursos de Olimpiadas de Matemáticas Realizados en Veracruz 2012

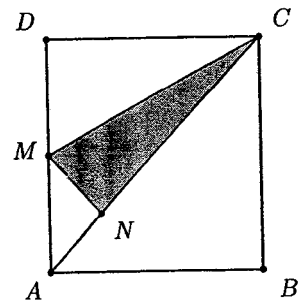
1.1. 17a OVMAES Etapa Zona

Este examen se utilizó en un concurso de la Segunda Etapa: de Zona, de la 17a Olimpiada Veracruzana de Matemáticas para Alumnos de Educación Secundaria.

Problema A Determina de cuántas formas se puede partir el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ en dos subconjuntos, de forma que la suma de los elementos en cada uno de ellos sea la misma.

Problema B Decimos que un número de tres cifras es *"siamés"* si el número formado por los dos primeros dígitos es un cuadrado perfecto y también lo es el número formado por las dos últimas cifras. Encuentra todos los números *"siameses"*.

Problema C En la figura, $ABCD$ es un cuadrado en donde M es el punto medio de AD y MN es perpendicular a AC. Si el área del cuadrado es $120cm^2$, ¿cuál es el área del triángulo sombreado?



Problema D En una mesa están colocados dos montones de monedas, el de la izquierda con 7 y el de la derecha con 10. Para recogerlas, Claudia sigue siempre una de las siguientes reglas:

- Tomar 3 monedas de la izquierda.
- Tomar 2 monedas de la derecha.
- Tomar 1 moneda de cada montón.

¿Cuál es la menor cantidad de movimientos que Claudia debe realizar para recoger todas las monedas de la mesa?

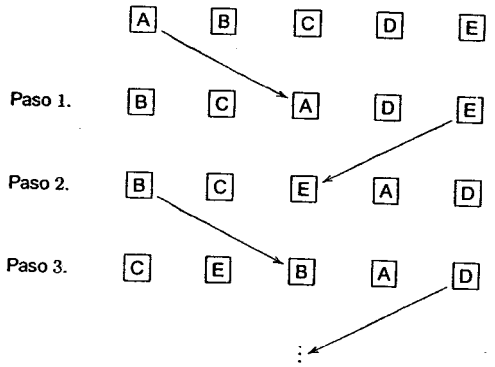
1.2. 17a OVMAES Etapa Estatal Intermodalidades

Este examen se utilizó en la Quinta Etapa: Estatal Intermodalidades de la 17a Olimpiada Veracruzana de Matemáticas para Alumnos de Educación Secundaria. El concurso se realizó en la Escuela Secundaria Técnica Número 3, en la Ciudad de Xalapa, Ver., el día 25 de mayo de 2012.

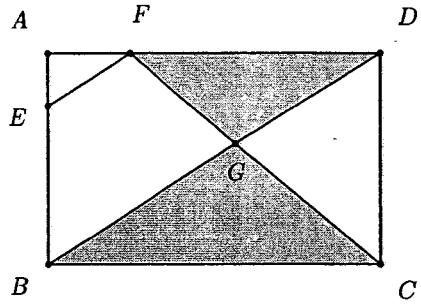
Problema E ¿Cúantos números impares hay entre 0 y 2012 que no son divisibles entre 5?

Problema F Magda tiene en su monedero monedas de 5 y 10 pesos. Ella tiene 100 monedas y se da cuenta que si cambiara cada moneda de 5 pesos por una de 10, y cada moneda de 10 pesos por una moneda de 5, ganaría 70 pesos. ¿Cúanto dinero tiene Magda en su monedero?

Problema G Cinco tarjetas con letras A, B, C, D y E se ponen sobre la mesa en ese orden, de izquierda a derecha. En el primer movimiento la carta que está más a la izquierda se coloca en el centro, reacomodando el resto como se muestra en la figura. En el segundo movimiento la carta de la orilla derecha se coloca en el centro, en el siguiente se pasa la de la orilla izquierda al centro, y así sucesivamente. ¿Cúal es la posición de las tarjetas en el paso 2012?



Problema H Sean $ABCD$ un rectángulo y F un punto en AD tal que AF mide una cuarta parte de AD. Sea E un punto en AB tal que EF es paralelo a la diagonal BD y sea G la intersección de BD con CF como en la figura. Si $BE = 3$, el área del triángulo BCG es igual a 24 y el área del triángulo DFG es igual a 6, encuentra el área del rectángulo $ABCD$.



Problema I Los números telefónicos de cierta ciudad constan de 10 dígitos empezando con el número 5:

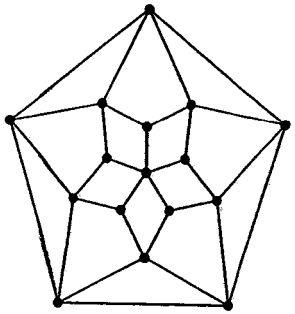
$$5\,a\,b\,c\,d\,e\,f\,g\,h\,i$$

decimos que un número es *"fácil de memorizar"* si la sucesión de los cuatro dígitos $abcd$ se repite dentro de la sucesión de los últimos cinco dígitos $efghi$. ¿Cúantos números *"fáciles de memorizar"* existen?

1.3. 26a OMM Estado de Veracruz

El Concurso Estatal de Veracruz de la 26a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizó en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Veracruzana, en la Ciudad de Xalapa, Ver., el día 2 de junio de 2012.

Problema J En cada vértice de la gráfica se encuentra un estudiante. Se distribuyen 3360 monedas entre los estudiantes. Al mismo tiempo todos los estudiantes pasan todas sus monedas a sus respectivos vecinos en cantidades iguales. Después de este movimiento todos los estudiantes obtienen el mismo número de monedas que inicialmente tenían. Encuentra el número de monedas que el estudiante del centro de la gráfica tenía originalmente.



Problema K Determina todas las maneras posibles en que se puede escribir 2012 como suma de números enteros positivos consecutivos.

Problema L Tenemos dos bolsas con canicas, una con P canicas y la otra con Q canicas. Podemos cambiar el número de canicas de las bolsas utilizando alguna de las siguientes dos reglas:

(a) Quitar de ambas bolsas la misma cantidad de canicas.

(b) Duplicar la cantidad de canicas en una de las bolsas.

¿Para qué parejas P y Q es posible terminar con ambas bolsas vacías?

Si se cambia la regla (b) por permitir triplicar la cantidad de canicas de una bolsa, ¿cómo cambia el resultado?

Problema M Nueve personas van a cenar, tres piden bistec, tres piden pescado y tres piden carne de cerdo. Cuando el mesero trae sus platos, no recuerda la orden de cada quien, así que les sirve los platos al azar. ¿De cuántas formas diferentes pudo haber servido el mesero los platos, si sólo una de las personas obtuvo el tipo de carne que pidió?

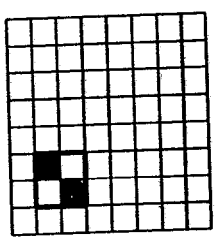
Problema N Sean $ABCD$ un rectángulo, E cualquier punto en AB y F cualquier punto en AD. Demuestra que el área del rectángulo $ABCD$ es igual a la suma de dos veces el área de $\triangle CFE$ más $BE \cdot DF$.

1.4. 26a OMM Selectivo Estado de Veracruz

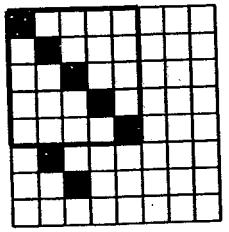
El Examen Selectivo de la 26a Olimpiada Mexicana de Matemáticas en el Estado de Veracruz se realizó en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Veracruzana, en la Ciudad de Xalapa, Ver., el día 8 de septiembre de 2012. Se utilizó para seleccionar a los estudiantes que conformaron la Delegación que representó al Estado de Veracruz en el Concurso Nacional de la 26a OMM.

Problema O Dos jugadores A y B juegan alternadamente en una cuadrícula de $n \times n$. Una tirada consiste en escoger un entero $2 \leq m \leq n$ y una subcuadrícula de $m \times m$ contenida en la cuadrícula inicial, y pintar

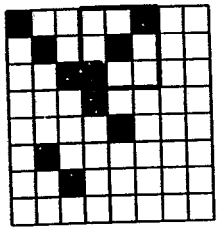
todos los cuadritos de 1×1 que están en una de las dos diagonales de dicha subcuadrícula. Además se tiene la restricción de que no se puede escoger una subcuadrícula que contenga cuadritos pintados previamente (ver el ejemplo que se ilustra abajo en la figura). Pierde el jugador que ya no puede realizar una tirada. Si A es el primero en tirar, ¿quién de A o B puede asegurar que ganará si juega de manera óptima?, ¿cómo debe proceder para asegurar su triunfo?



jugada de A, $m = 2$



jugada de B, $m = 5$



jugada de A, $m = 3$

Problema P Sean $\triangle ABC$ un triángulo equilátero y D cualquier punto en la prolongación del lado BC (con C entre B y D). Sean P la intersección de la bisectriz del ángulo $\angle BAD$ con BC y X la intersección del circuncírculo del triángulo $\triangle APC$ con AD. Prueba que $AX = AC$.

Problema Q Encuentra todos los enteros positivos a, b y p, con p número primo, que satisfacen la igualdad

$$a^3\left(b^2 - p\right) = a^3 + b^2 - 1.$$

Problema R Sea $\mathcal{P}$ un polígono regular de 20 lados. Determina cuántos triángulos $\mathcal{T}$ con vértices en los vértices de $\mathcal{P}$ cumplen que ningún lado de $\mathcal{T}$ es también lado de $\mathcal{P}$.

Capítulo 2

Problemas de Entrenamiento

Problema 01 (Problema A del Examen Estatal de la 16a OMM Veracruz de 2002)
Los puntos A, B, C, D, E, F y G son los vértices de un heptágono regular (en el sentido de las manecillas del reloj). FE y BC se prolongan hasta cortarse en un punto P. ¿Cuánto vale el ángulo $\angle CPE$?

Problema 02 (Problema B del Examen Estatal de la 11a OMM Veracruz de 1997)
En la siguiente operación se han quitado todos los signos (dejando los símbolos $\triangle$) y el resultado de la misma (indicado por la letra R).

$$0\triangle 1\triangle 2\triangle 3\triangle 4\triangle 5\triangle 6\triangle 7\triangle 8 = R$$

Sabiendo que cada $\triangle$ representa un signo de $+$ o de $-$, ¿cuáles son los posibles valores distintos de R?

Problema 03 Calcula el producto de todos los enteros positivos menores que 100, y que tengan exactamente tres divisores positivos. Comprueba que dicho número es un cuadrado perfecto.

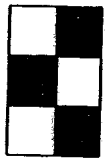
Problema 04 (Problema D del Examen Estatal de la 17a OMM Veracruz de 2003)
En un juego de computadora se empieza con un tablero de 3×2 coloreado de blanco y negro, como se indica en el Tablero A. En cada jugada se eligen dos cuadritos que comparten un lado y se les cambia el color de acuerdo a las siguientes reglas:

- Negro cambia a Rojo.
- Rojo cambia a Blanco.
- Blanco cambia a Negro.

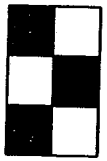
Con base en lo anterior:

(a) Describe una forma de convertir el Tablero A en el Tablero B, en 6 jugadas.

(b) Demuestra que no es posible convertir el tablero A en el B en menos de 6 jugadas.



Tablero A



Tablero B

Problema 05 (Problema A del Examen Estatal de la 12a OMM Veracruz de 1998) Tenemos un rectángulo $ABCD$ con $AB = CD = a$, $BC = DA = b$ y $a < b$. Sea M el punto medio de AC y sean P y Q los puntos medios de AM y MC, respectivamente. Supongamos que la línea BP corta a AD en R y BQ corta a CD en S.

(a) Demuestra que RS es paralela a AC.

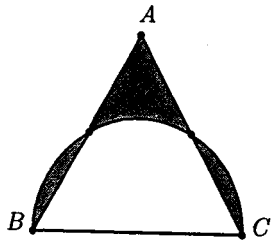
(b) Si $a = 3$ y $b = 4$, ¿ cuánto mide RS?

Problema 06 Demuestra que en cualquier partición del conjunto $\{1, 2, \ldots, 9\}$ en tres subconjuntos, hay uno de ellos que cumple que el producto de sus números es mayor que 71.

Problema 07 (Problema A del Examen Estatal de la 11a OMM Veracruz de 1997) Tenemos un triángulo rectángulo $\triangle ABC$. Sobre la hipotenusa BC se marcan puntos D y E tales que $BD = BA$ y $EC = AC$. Después se marca un punto F en el lado AB de tal forma que $BF = BE$ y análogamente un punto G en el lado AC de manera que $GC = DC$. Demuestra que los puntos A, D, E, F y G están sobre una misma circunferencia.

Problema 08 (Problema B del Examen Estatal de la 16a OMM Veracruz de 2002) El número 2002 es un número *capicúa* porque se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. ¿Cuánto vale la suma de todos los números capicúas de cuatro dígitos?

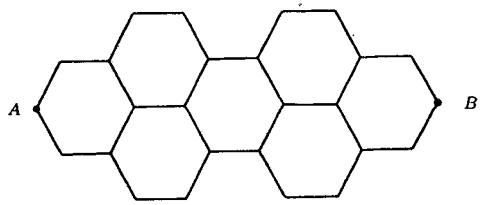
Problema 09 (Problema B del Examen Estatal de la 17a OMM Veracruz de 2003) En la siguiente figura el triángulo $\triangle ABC$ es equilátero, tiene lado 2 y la semicircunferencia tiene diámetro BC. ¿Cuánto vale el área sombreada?



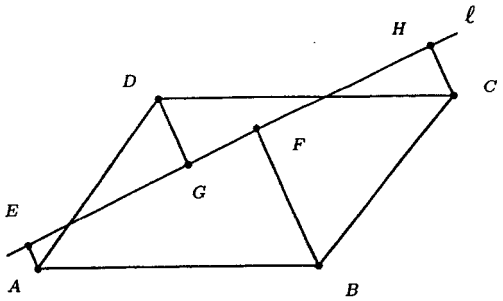
Problema 10 Calcular la suma

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{999\cdot 1001}.$$

Problema 11 (Problema B del Examen Estatal de la 19a OMM Veracruz de 2005) ¿Cuántos caminos hay del punto A al punto B siguiendo las líneas de la figura, si las direcciones permitidas son $\rightarrow$, $\nearrow$, $\searrow$, $\swarrow$, $\nwarrow$ (es decir, cualquier sentido está permitido salvo $\leftarrow$) y no se permite pasar dos veces por el mismo punto?

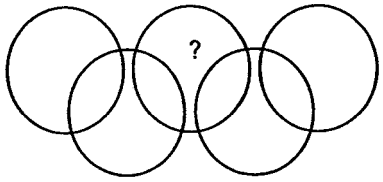


Problema 12 (Problema C del Examen Estatal de la 18a OMM Veracruz de 2004) La figura $ABCD$ es un paralelogramo, ℓ es una recta que corta los lados AD y CD del paralelogramo; E, F, G y H son puntos de la recta ℓ tales que AE, BF, DG y CH son todos perpendiculares a ℓ, además $AE = 4$, $GD = 7$ y $CH = 5$. ¿Cuánto mide BF?

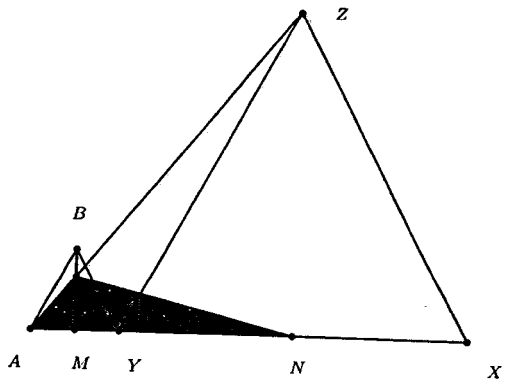


Problema 13 (Problema B del Examen Estatal de la 18a OMM Veracruz de 2004) La suma de 5 enteros positivos es 100. ¿Cuál es la mayor diferencia que pueden tener los dos más cercanos?

Problema 14 (Problema A del Examen Estatal de la 24a OMM Veracruz de 2010) En la figura hay 9 regiones dentro de los círculos. Si se escriben los números del 1 al 9, exactamente uno en cada región, de manera que la suma de los números en cada círculo sea 11, ¿qué número va en el lugar del signo de interrogación?



Problema 15 Si $AY = 1$ y $XY = 4$, los triángulos $\triangle ABY$ y $\triangle XYZ$ son equiláteros y M y N son puntos medios de los segmentos AY y XZ, ¿cuánto vale el área sombreada?



Problema 16 Determina cuáles enteros positivos z cumplen las siguientes condiciones.

- Que la suma de los dígitos de z sea igual a 18.
- Que el número z incrementado en 3600 sea un cuadrado perfecto.
- Que z sea menor que 2012.

Problema 17 ¿Para qué números naturales n la suma de los divisores de 10^n es múltiplo de 9?.

Problema 18 Consideremos un triángulo acutángulo $\triangle ABC$. La circunferencia de diámetro AB interseca la altura CF (y su prolongación) en M y N, la circunferencia de diámetro AC interseca la altura BE (y su prolongación) en P y Q. Demuestra que M, N, P y Q están en una misma circunferencia.

Problema 19 En un pizarrón un maestro escribe dos cantidades: 10 y 20, y pide a sus alumnos que por turnos resten o añadan 1 a sólo una de las cantidades y escriban el resultado. Si al final quedaron los números 20 y 10, demuestra que en algún momento estuvieron escritos números idénticos.

Problema 20 Sean $\triangle ABC$ un triángulo y K, L, M y N las proyecciones de A sobre la bisectriz externa de $\angle B$, la bisectriz interna de $\angle B$, la bisectriz interna de $\angle C$ y la bisectriz externa de $\angle C$, respectivamente. Muestra que K, L, M y N son colineales.

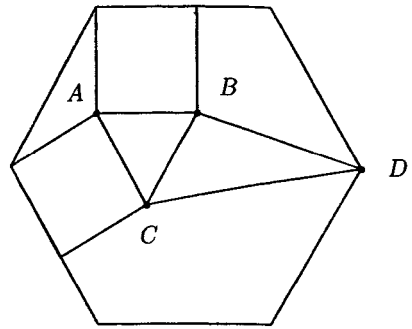
Problema 21 ¿Cuántos números de cuatro cifras cumplen la propiedad de que el producto de dichas cifras es un cuadrado perfecto?

Problema 22 (Problema D del Examen Estatal de la 20a OMM Veracruz de 2006) En el hexágono regular de la figura cada lado mide $\sqrt{3}$ y se dibujaron dos cuadrados sobre los lados, como se muestra en la figura.

(a) Prueba que el triángulo $\triangle ABC$ es equilátero.

(b) Encuentra la medida de los lados de los cuadrados.

(c) Prueba que el área del triángulo $\triangle BCD$ es $\frac{5-\sqrt{3}}{4}$.



Problema 23 (a) Sea F una familia de rectas en el plano que cumpla que cada tres elementos de la familia F tiene un punto en común. Prueba que todas las rectas en la familia F tienen un punto en común.

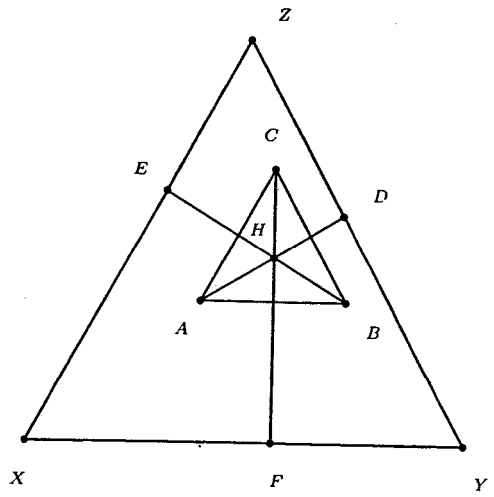
(b) Sea G una familia de puntos en el plano que cumpla que cada tres elementos de la familia G son colineales. Prueba que todos los puntos de la familia G son colineales.

(c) Sean F_1, F_2 y F_3 tres familias de rectas en el plano tales que cada tres rectas, cada una de diferente familia, tienen un punto en común. Prueba que todas las rectas de alguna de las familias F_1, F_2 y F_3 tienen un punto en común.

Problema 24 Encuentra el máximo común divisor entre $11\cdots1$ (2001 dígitos) y $11\cdots1$ (667 dígitos).

Problema 25 (Problema D del Examen Estatal de la 19a OMM Veracruz de 2005)

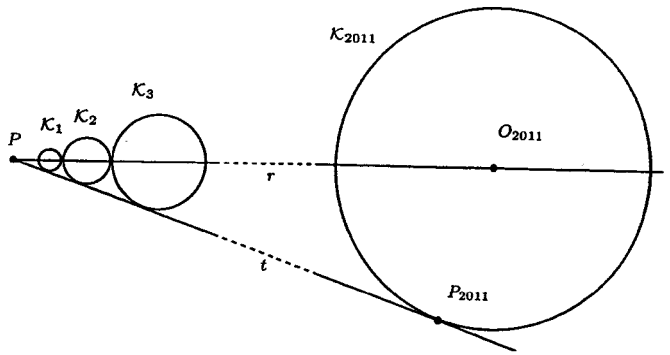
En el triángulo equilátero $\triangle ABC$ cada lado mide 2. Las alturas del triángulo se intersecan en el punto H y la distancia de H a cada lado es k. Se construye un triángulo $\triangle XYZ$ que tiene lados paralelos a $\triangle ABC$ y las rectas AH, BH y CH cortan a los lados de $\triangle XYZ$ en D, E y F, respectivamente. Si $HD = 2k$, $HE = 3k$ y $HF = 4k$, ¿cuánto mide el lado del triángulo $\triangle XYZ$?



Problema 26 (Problema E del Examen Estatal de la 25a OMM Veracruz de 2011)

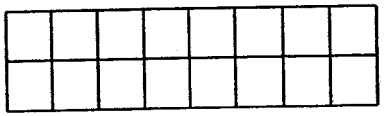
La siguiente figura muestra algunas de 2011 circunferencias $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$, $\mathcal{K}_3$, ..., $\mathcal{K}_{2011}$ que tienen sus centros sobre la recta r, son todas tangentes a la recta t y cada circunferencia es tangente a la circunferencia anterior; además los radios de las dos primeras circunferencias $\mathcal{K}_1$ y $\mathcal{K}_2$ miden respectivamente 1 y 2.

Si P es el punto de intersección de r con t, O_{2011} es el centro de $\mathcal{K}_{2011}$ y P_{2011} es el punto de tangencia de $\mathcal{K}_{2011}$ con t, encuentra el área del triángulo determinado por los puntos P, O_{2011} y P_{2011}.



Problema 27 (Problema A del Examen Estatal de la 21a OMM Veracruz de 2007)

En la siguiente cuadrícula, se puede colocar un 1 o un -1 en cada casilla. ¿De cuántas maneras diferentes se puede llenar la cuadrícula si se requiere que la suma de los números en cada fila y en cada columna sea cero?



Problema 28 Sea $\triangle ABC$ un triángulo acutángulo. Una circunferencia S que pasa por B y C corta a las bisectrices de $\angle ABC$ y $\angle ACB$ en los puntos M y N, respectivamente. Sea P el punto en donde la recta MN corta a AB. Demuestra que si la circunferencia inscrita al triángulo $\triangle ABC$ es tangente a AB en P, entonces BC es diámetro de S.

Problema 29 Determina todos los posibles resultados que se obtienen al sumar 90 enteros distintos tomados del 1 al 100.

Problema 30 Encuentra todos los números enteros positivos b y k que son solución de la ecuación

$$b^2 + 1 = k(b-1).$$

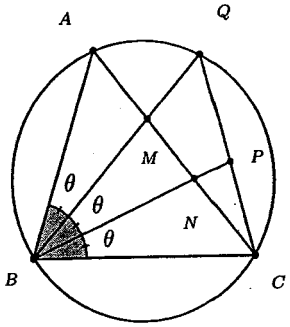
Problema 31 En una cárcel diez reos están condenados a muerte y se les va a dar una última oportunidad para salvarse.

Se pondrán los diez en una fila y a cada uno se le pondrá un sombrero, ya sea blanco o negro. Cada reo sólo podrá ver el color de los sombreros de sus compañeros de adelante (no podrá ver el suyo ni ninguno de los de atrás). Se les irá preguntando, a uno por uno, empezando por el último de la fila y en orden hasta terminar con el primero: "¿cuál es el color de su sombrero?"

Si un reo le atina a su color salva su vida, en caso contrario lo matan. ¿Cómo le pueden hacer los reos para que se salven al menos nueve de ellos?

Problema 32 Considera la siguiente figura, en donde $\angle ABQ = \angle QBP = \angle PBC = \theta$. Demuestra que

$$\frac{AM}{AN} + \frac{CP}{CQ} = 1.$$



Problema 33 (Problema 1 del Examen Nacional de la 22a OMM 2008)

Sean $1 = d_1 < d_2 < d_3 < \cdots < d_k = n$ los divisores del entero positivo n. Encuentra todos los números n tales que $n = d_2^2 + d_3^3$.

Problema 34 Un número de cubos de lado uno se colocan juntos para formar un cubo más grande y algunas de las caras del cubo grande se pintan. Después de pintado se vuelven a separar los cubos y vemos que 45 cubos de lado uno no tienen ninguna de sus caras pintadas. ¿Cuántas caras del cubo grande se pintaron?

Problema 35 Sean $\triangle ABC$ un triángulo acutángulo y X el pie de A en BC. Sean Y y Z los pies de A en las tangentes al circuncírculo de $\triangle ABC$ que pasan por B y C respectivamente. Si $AY = 2$ y $AZ = 5$, encuentra el valor de AX. Además demuestra que los triángulos $\triangle AXY$ y $\triangle AZX$ son semejantes.

Problema 36 Un hombre del desierto dejó dicho en su testamento que sus tres hijos debían recibir la n-ésima, la m-ésima y la t-ésima parte de su rebaño de camellos, respectivamente. El hombre tenía N camellos, con $N \geq 3$, en el rebaño cuando murió, en donde $N+1$ es múltiplo común de m, n y t. Como los tres hijos no pudieron dividir N exactamente en m, n, y t partes, mandaron llamar a Pablo para que les ayudara a resolver el problema. Pablo llegó con su propio camello, el cual se sumó al rebaño. Entonces el rebaño fue dividido de acuerdo a los deseos del hombre. Pablo tomó su camello de vuelta, el cual sobró después de la repartición. Determina todas las soluciones posibles (m, n, t, N).

Problema 37 A cada vértice de un cubo se le asigna el valor de $+1$ ó -1, y a cada cara el producto de los valores asignados a sus vértices. ¿Qué valores puede tomar la suma de los 14 números así obtenidos?

Problema 38 Hay $2n+1$ duendes. Al principio cada duende tiene n amigos entre los demás duendes. Cada día cada duende se convierte en amigo de los amigos de sus amigos. Prueba que debe llegar el día en que todos sean amigos entre sí.

Problema 39 Dentro de un hexágono $ABCDEF$ se coloca un punto arbitrario G y se trazan segmentos desde éste a cada uno de los vértices del hexágono, formando seis triángulos $\triangle ABG$, $\triangle BCG$, $\triangle CDG$, $\triangle DEG$, $\triangle EFG$ y $\triangle AFG$, los cuales se colorean en forma alternada de blanco y negro. Demuestra que el área de color blanco es igual al área de color negro.

Problema 40 Encuentra todos los números formados por cuatro dígitos (todos distintos entre sí) que cumplen con la siguiente propiedad: Si sumas el número formado por sus dos primeros dígitos con el número formado por sus dos últimos dígitos, obtienes el número formado por sus dos dígitos centrales. Es decir, $\overline{abcd}$ es un número de cuatro dígitos que cumple la propiedad si $\overline{ab} + \overline{cd} = \overline{bc}$.

Problema 41 Sea $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo con ángulo recto en $\angle C$. Sea D el punto medio del arco $\overset{\frown}{AC}$ en el circuncírculo de $\triangle ABC$. Sea E el pie de D en BC, F la intersección de AE con el circuncírculo y M la intersección de BF con DE. Demuestra que M es el punto medio de DE.

Problema 42 (Problema 3 del Examen Nacional de la 17a OMM 2003)

En una fiesta hay el mismo número n de muchachos que de muchachas. Supongamos que a cada muchacha le gustan a muchachos y que a cada muchacho le gustan b muchachas. ¿Cuáles son los valores de a y b para los cuales podemos asegurar que forzosamente hay un muchacho y una muchacha que se gustan mutuamente?

Problema 43 (Problema 3 del Tercer Examen Estatal de la 18a OMM San Luis Potosí de 2004)

¿Existen enteros a y b de 2004 dígitos cada uno, con la propiedad de que los dígitos de b son una reordenación de los dígitos de a, y los dígitos de $a+b$ son puros nueves? ¿Existen dos enteros de 2005 dígitos con la misma propiedad? Justifica tus respuestas.

Nota: 0123 se toma como el número de 3 dígitos 123.

Problema 44 (Problema 3 del Examen Nacional de la 9a OMM 1995)

Sean A, B, C y D vértices consecutivos de un heptágono regular, AL y AM las tangentes desde A a la circunferencia de centro C y radio CB. Sea N la intersección de AC y BD. Demuestra que los puntos L, M y N son colineales.

Problema 45 Sea X un conjunto con n elementos. Demuestra que el número de pares (A, B) tales que A y B son subconjuntos de X, A es un subconjunto de B y A es distinto de B, es $3^n - 2^n$.

Problema 46 Sea $\triangle ABC$ un triángulo con $\angle CAB = 60°$, las alturas BE y CF se cortan en H, y sea O el circuncentro de $\triangle ABC$. Demuestra que HO es bisectriz del ángulo $\angle FHB$.

Problema 47 Sean A y B los puntos de intersección de dos circunferencias distintas. Sean C y D los puntos de intersección de las circunferencias con una recta que pasa por A. Sean P y Q los pies de B en las tangentes de las circunferencias que pasan por C y D respectivamente. Demuestra que PQ es tangente a la circunferencia de diámetro AB.

Problema 48 (Problema 5 del Examen Nacional de la 14a OMM 2000)

Se tiene un tablero de $n \times n$ pintado como un tablero de ajedrez. Está permitido efectuar la siguiente operación en el tablero: escoger un rectángulo en la cuadrícula tal que las longitudes de sus lados sean ambas pares o ambas impares, pero que no sean las dos iguales al mismo tiempo, e invertir los colores de los cuadritos de ese rectángulo (es decir, los cuadritos del rectángulo que antes eran blancos, ahora son negros y viceversa).

Encuentra cuáles son los valores de n' que hacen posible lograr que todos los cuadritos queden de un mismo color después de haber efectuado la operación el número de veces que sea necesario.

Nota: La dimensión de los rectángulos que se escogen puede ir cambiando.

Problema 49 (Problema 4 de la 36a Olimpiada Matemática Española Fase Nacional 2000)

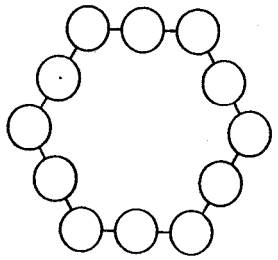
Encuentra el mayor número entero n tal que cumpla las siguientes condiciones

- $E\left(\frac{n}{3}\right)$ tiene sus tres cifras iguales.
- $E\left(\frac{n}{3}\right)$ es un número triangular, es decir, existe un natural n tal que

$$E\left(\frac{n}{3}\right) = 1+2+3+\cdots+(n-1)+n.$$

Nota: $E(x)$ es la parte entera de n.

Problema 50 Los números del 1 al 12 se colocan (sin repetir) en los círculos del siguiente arreglo hexagonal.



(a) Demuestra que no existe una forma de acomodarlos que cumpla que la suma de los números que están a cada uno de los lados del hexágono sea 16.

(b) Muestra que existe un acomodo en donde la suma en cada uno de los lados del hexágono sea 18.

Problema 51 Si en un triángulo cualquiera se construyen exteriormente triángulos equiláteros en los lados del triángulo original, demuestra lo siguiente:

(a) Los tres segmentos formados uniendo un vértice del triángulo original con el vértice opuesto del triángulo equilátero construido en el lado opuesto, son iguales.

(b) Los segmentos obtenidos en el inciso anterior, son concurrentes.

(c) La razón entre el lado de cada triángulo equilátero y su circunradio es igual a $\sqrt{3}$.

(d) Dado un vértice del triángulo original, el triángulo formado uniendo este vértice con los circuncentros de los triángulos equiláteros adyacentes es semejante al triángulo formado por este vértice y otro vértice del triángulo original junto con el vértice opuesto del triángulo equilátero construido en el lado opuesto.

(e) Concluye que los cincuncentros de los triángulos equiláteros forman a su vez un triángulo equilátero.

Nota: A este último resultado se le conoce como el Teorema de Napoleón.

Problema 52 Un entero positivo n se llama divisor cuadrático si siempre que n divide a $m^n - 1$, para algún entero m, también se cumple que n^2 divide a $m^n - 1$.

(a) Demuestra que cualquier número primo es divisor cuadrático.

(b) Demuestra que hay una infinidad de números compuestos que son divisores cuadráticos.

Problema 53 (Problema 1 del Examen Nacional de la 9a OMM 1995)

En una Olimpiada de Matemáticas los concursantes están ocupando todos los asientos de un salón rectangular donde los asientos están acomodados en filas (hay más de dos filas y en cada fila más de dos asientos). Al inicio del examen un profesor les sugiere que se deseen suerte dándose la mano, cada uno de los concursantes estrecha la mano de los concursantes que se encuentran a su alrededor (que pueden ser a lo más 8) y solamente a estos. Alguien observa que se dieron 1020 apretones de manos. ¿Cuántos concursantes hay?

Problema 54 Si a, b, c son números positivos con $a+b+c=2$ demuestra que

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}\geq 1.$$

Problema 55 (Problema 2 del Examen Nacional de la 9a OMM 1995)

Considera seis puntos en el plano con la propiedad de que ocho de las distancias entre ellos son iguales a 1. Demuestra que al menos tres de los puntos forman un triángulo equilátero de lado 1.

Capítulo 3

26a OMM Concurso Nacional

El Concurso Nacional de la 26a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizó en la Ciudad de Guanajuato, Gto., durante la semana del 11 al 16 de Noviembre de 2012.

3.1. Primer Día

Problema I Sean $\mathcal{C}_1$ una circunferencia con centro O, P un punto sobre ella y ℓ la recta tangente a $\mathcal{C}_1$ en P. Considera un punto Q sobre ℓ, distinto de P, y sea $\mathcal{C}_2$ la circunferencia que pasa por O, P y Q. El segmento OQ interseca a $\mathcal{C}_1$ en S y la recta PS interseca a $\mathcal{C}_2$ en un punto R distinto de P. Si r_1 y r_2 son las longitudes de los radios de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, respectivamente, muestra que

$$\frac{PS}{SR} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Problema II Sea $n \geq 4$ un número par. Considera una cuadrícula de $n \times n$. Dos celdas (cuadraditos de 1×1) son *vecinas* si comparten un lado, si están en extremos opuestos de un mismo renglón o si están en extremos opuestos de una misma columna. De esta forma, toda celda en la cuadrícula tiene exactamente cuatro celdas vecinas.

En cada celda está escrito un número del 1 al 4 de acuerdo con las siguientes reglas:

- Si en una celda está escrito un 2 entonces en dos o más celdas vecinas está escrito un 1.
- Si en una celda está escrito un 3 entonces en tres o más celdas vecinas está escrito un 1.
- Si en una celda está escrito un 4 entonces en las cuatro celdas vecinas está escrito un 1.

Entre los acomodos que cumplan las condiciones anteriores, ¿cuál es el máximo número que se puede obtener sumando los números escritos en todas las celdas?

Problema III Muestra que entre cualesquiera 14 números enteros positivos consecutivos siempre hay 6 números tales que cualesquiera dos de ellos son primos relativos.

Nota: Dos números a, b son primos relativos si su único divisor común positivo es el 1.

3.2. Segundo Día

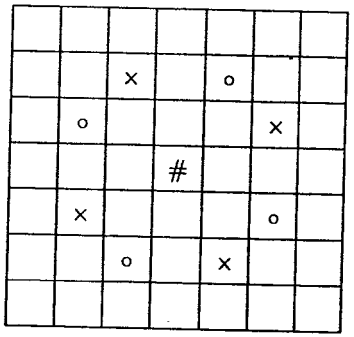
Problema IV A cada entero positivo se le aplica el siguiente proceso: al número se le resta la suma de sus dígitos, y el resultado se divide entre 9. Por ejemplo, el resultado del proceso aplicado al 938 es 102, ya que $(938-(9+3+8))/9=102$. Aplicando dos veces el proceso a 938 se llega a 11, aplicado 3 veces se llega al 1, y aplicado cuatro veces se llega al 0.

Cuando a un entero positivo n se le aplica el proceso una o varias veces, se termina en 0. Al número al que se llega antes de llegar al 0, lo llamamos la *casa* de n.

¿Cuántos números menores que 26000 tienen la misma casa que 2012?

Problema V Algunas ranas, unas de ellas rojas y otras verdes, se van a mover en un tablero 11×11, de acuerdo a las siguientes reglas. Si una rana está ubicada, digamos, en la casilla marcada con $\#$ en la siguiente figura, entonces

- Si es roja, puede saltar a cualquiera de las casillas marcadas con $\times$.
- Si es verde, puede saltar a cualquiera de las casillas marcadas con $\circ$.



Diremos que dos ranas (de cualquier color) *se pueden encontrar en una casilla* si ambas pueden llegar hasta tal casilla saltando una o más veces, no necesariamente con el mismo número de saltos.

(a) Muestra que si ponemos 6 ranas, entonces hay al menos 2 que se pueden encontrar en una casilla.

(b) ¿Para qué valores de k es posible poner una rana roja y una verde de manera que haya exactamente k casillas en las que estas dos ranas se pueden encontrar?

Problema VI Considera un triángulo acutángulo $\triangle ABC$ con circuncírculo $\mathcal{C}$. Sean H el ortocentro de $\triangle ABC$ y M el punto medio de BC. Las rectas AH, BH y CH cortan por segunda vez a $\mathcal{C}$ en D, E y F, respectivamente; la recta MH corta a $\mathcal{C}$ en J de manera que H queda entre M y J. Sean K y L los incentros de $\triangle DEJ$ y $\triangle DFJ$, respectivamente. Muestra que KL es paralela a BC.

Capítulo 4

Soluciones de los Exámenes de Concursos de Olimpiadas de Matemáticas Realizados en Veracruz 2012

4.1. 17a OVMAES Etapa Zona

Problema A Determina de cuántas formas se puede partir el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ en dos subconjuntos, de forma que la suma de los elementos en cada uno de ellos sea la misma.

Solución Como la suma total es 28, la suma de cada conjunto debe ser 14. En uno de los conjuntos está el 7 y necesariamente debe estar acompañado con alguno de los siguientes conjuntos de números

$$1 \text{ y } 6,$$
$$2 \text{ y } 5,$$
$$3 \text{ y } 4,$$
$$1, 2 \text{ y } 4.$$

Por lo tanto hay 4 formas de partir el conjunto.

Problema B Decimos que un número de tres cifras es *"siamés"* si el número formado por los dos primeros dígitos es un cuadrado perfecto y también lo es el número formado por las dos últimas cifras. Encuentra todos los números *"siameses"*.

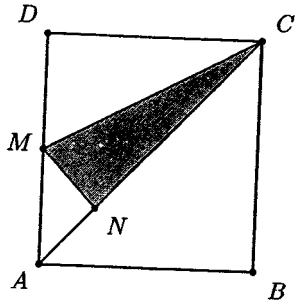
Solución Los cuadrados perfectos de dos cifras son

$$16, 25, 36, 49, 64 \text{ y } 81.$$

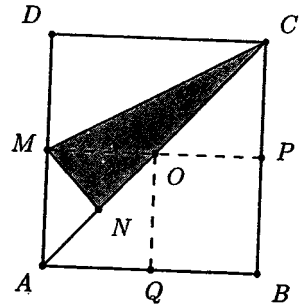
Los números siameses se formarán cuando coincidan el segundo con el primer dígito de los cuadrados de dos cifras, así los únicos números siameses son

$$164,\ 364,\ 649 \text{ y } 816.$$

Problema C En la figura, $ABCD$ es un cuadrado en donde M es el punto medio de AD y MN es perpendicular a AC. Si el área del cuadrado es $120cm^2$, ¿cuál es el área del triángulo sombreado?



Solución Calculemos el área de los triángulos no sombreados. Sean P el punto medio de CB, Q el punto medio de AB y O la intersección de AC con MP. Sea A_1 el área del triángulo ABC que, por ser la mitad del cuadrado original, es igual a $60\ cm^2$. Sea A_2 el área del triángulo CDM que, por ser la mitad del rectángulo $MPCD$, que a su vez es a mitad del cuadrado $ABCD$, es igual a $30\ cm^2$. Sea A_3 el área del triángulo ANM que, por ser la cuarta parte del cuadrado $AQOM$, que a su vez es la cuarta parte del cuadrado $ABCD$, es igual a $7.5\ cm^2$. Como $A_1 + A_2 + A_3 = 97.5\ cm^2$, el área sombreada es igual a $120\ cm^2 - 97.5\ cm^2 = 22.5\ cm^2$.



Problema D En una mesa están colocados dos montones de monedas, el de la izquierda con 7 y el de la derecha con 10. Para recogerlas, Claudia sigue siempre una de las siguientes reglas:

- Tomar 3 monedas de la izquierda.
- Tomar 2 monedas de la derecha.
- Tomar 1 moneda de cada montón.

¿Cuál es la menor cantidad de movimientos que Claudia debe realizar para recoger todas las monedas de la mesa?

Solución Para dejar un número de monedas múltiplo de 3 en el primer montón debe hacer la tercera operación 1, 4 o 7 veces. Para dejar un número par de monedas en el segundo montón debe hacer la tercera operación 0, 2, 4, 6, 8, 10 veces. Entonces lo mínimo es hacer la tercera operación 4 veces, una vez la primer operación y 3 veces la segunda operación.

4.2. 17a OVMAES Etapa Estatal Intermodalidades

Problema E ¿Cúantos números impares hay entre 0 y 2012 que no son divisibles entre 5?

Solución Observemos inicialmente que entre 0 y 2012 hay 1006 impares. Por otro lado, si enlistamos dichos impares y los agrupamos en conjuntos de 5 elementos, entonces obtenemos 201 conjuntos y sobra el impar 2011.

$$\underbrace{\underbrace{1,3,5,7,9}_{5\text{ impares}},\underbrace{11,13,15,17,19}_{5\text{ impares}},\ldots,\underbrace{2001,2003,2005,2007,2009}_{5\text{ impares}}}_{201\text{ grupos}},2011.$$

Como en cada uno de los 201 grupos sólo hay un múltiplo de 5 y como 2011 no es múltiplo de 5, entonces la respuesta es

$$1006 - 201 = 805.$$

Problema F Magda tiene en su monedero monedas de 5 y 10 pesos. Ella tiene 100 monedas y se da cuenta que si cambiara cada moneda de 5 pesos por una de 10, y cada moneda de 10 pesos por una moneda de 5, ganaría 70 pesos. ¿Cúanto dinero tiene Magda en su monedero?

Solución Como Magda ganaría 70 pesos si hace el cambio de monedas, entonces tiene $\frac{70}{5} = 14$ monedas más de 5 que de 10 pesos. De esta forma tiene

$$14 + \frac{100 - 14}{2} = 57 \text{ monedas de 5 pesos,}$$

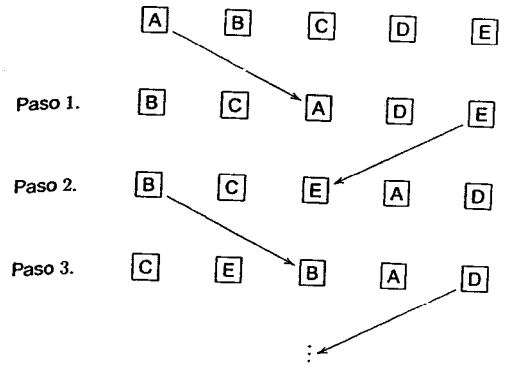
y en consecuencia tiene

$$100 - 57 = 43 \text{ monedas de 10 pesos.}$$

Por lo tanto tiene Magda tiene

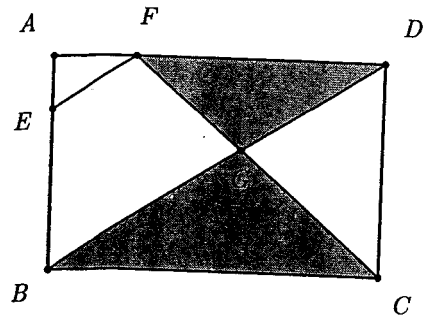
$$(43 \times 10 \text{ pesos}) + (57 \times 5 \text{ pesos}) = 715 \text{ pesos.}$$

Problema G Cinco tarjetas con letras A, B, C, D y E se ponen sobre la mesa en ese orden, de izquierda a derecha. En el primer movimiento la carta que está más a la izquierda se coloca en el centro, reacomodando el resto como se muestra en la figura. En el segundo movimiento la carta de la orilla derecha se coloca en el centro, en el siguiente se pasa la de la orilla izquierda al centro, y así sucesivamente. ¿Cúal es la posición de las tarjetas en el paso 2012?



Solución Después de 5 pasos las cartas quedan en el orden inverso al inicial, luego en el sexto paso se toma la carta de la derecha y se pone en centro, por lo que después de 10 pasos el orden de las cartas es el mismo que en el inicio. Lo anterior se repite cada 10 pasos. Y como $2012 = 201 \times 10 + 2$, entonces la posición de las cartas en el paso 2012 es la misma que en el paso 2, que es

Problema H Sean $ABCD$ un rectángulo y F un punto en AD tal que AF mide una cuarta parte de AD. Sea E un punto en AB tal que EF es paralelo a la diagonal BD y sea G la intersección de BD con CF como en la figura. Si $BE = 3$, el área del triángulo BCG es igual a 24 y el área del triángulo DFG es igual a 6, encuentra el área del rectángulo $ABCD$.



Solución 1 Sea $x = AF$, como $AF = \frac{1}{4}AD$ entonces $FD = 3x$. Sea y la altura de $\triangle DFG$ con base FD y sea z la altura de $\triangle BCG$ con base BC. Por hipótesis tenemos

$$\frac{3xy}{2} = (\triangle DFG) = 6,$$
$$\frac{4xz}{2} = (\triangle BCG) = 24.$$

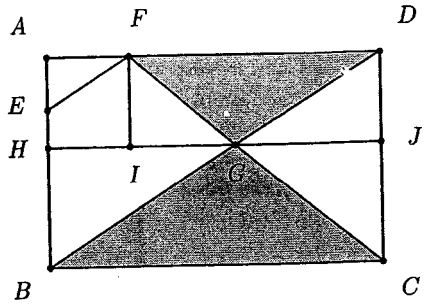
De donde obtenemos $xy = 4$ y $xz = 12$. Por otro lado al ser EF paralelo a BD, utilizando el Teorema de Thales tenemos que $\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FD} = \frac{1}{3}$, de donde $AE = 1$ y

$$y + z = 4.$$

De esta forma $4x = xy + xz = 4 + 12 = 16$. Y concluimos que

$$(ABCD) = AD \cdot AB = (4x) \cdot 4 = 64.$$

Solución 2 Sean H, I y J como en la figura, en donde HJ es paralelo a BC y pasa por G, y FI es perpendicular a AD.



Como por hipótesis $(\triangle DFG) = 6$ y $(\triangle BCG) = 24$, entonces $(DFIJ) = 12$ y $(BCJH) = 48$. Al ser $AF = \frac{1}{3}FD$ entonces $(AHIF) = \frac{1}{3}(DFIJ) = \frac{1}{3}12 = 4$. Concluimos que

$$(ABCD) = (BCJH) + (DFIJ) + (AHIF) = 48 + 12 + 4 = 64.$$

Problema I Los números telefónicos de cierta ciudad constan de 10 dígitos empezando con el número 5:

$$5\,a\,b\,c\,d\,e\,f\,g\,h\,i$$

decimos que un número es *"fácil de memorizar"* si la sucesión de los cuatro dígitos $abcd$ se repite dentro de la sucesión de los últimos cinco dígitos $efghi$. ¿Cúantos números *"fáciles de memorizar"* existen?

Solución Si $abcd = efgh$ entonces el número de posibilidades es $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$, y para i hay otras 10. Por lo que para este caso hay $10^4 \times 10 = 10^5$ números tales que $abcd = efgh$. De forma semejante podemos ver que hay 10^5 números tales $abcd = fghi$.

Debemos observar que hay números que pertenecen a los dos casos anteriores. Tales números cumplen simultáneamente que $abcd = efgh$ y $abcd = fghi$, lo cual implica que

$$a = e = f$$
$$b = f = g$$
$$c = g = h$$
$$d = h = i$$

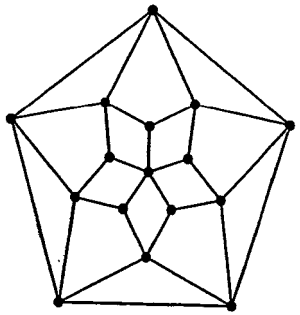
por lo que todos los dígitos son iguales y hay 10 posibilidades.

Por lo tanto la cantidad de números fáciles de memorizar es igual a los números tales que $abcd = efgh$, más los que satisfacen que $abcd = fghi$, menos aquellos que cumplen que $a = b = c = d = e = f = g = h = i$, es decir

$$2 \cdot 10^5 - 10.$$

4.3. 26a OMM Estado de Veracruz

Problema J En cada vértice de la gráfica se encuentra un estudiante. Se distribuyen 3360 monedas entre los estudiantes. Al mismo tiempo todos los estudiantes pasan todas sus monedas a sus respectivos vecinos en cantidades iguales. Después de este movimiento todos los estudiantes obtienen el mismo número de monedas que inicialmente tenían. Encuentra el número de monedas que el estudiante del centro de la gráfica tenía originalmente.



Solución Si un estudiante con 4 vecinos posee una cantidad x de monedas, pasará $\frac{x}{4}$ monedas a cada uno de sus vecinos; así todos los estudiantes que tienen 4 vecinos deben tener x monedas. Si y es la

cantidad de monedas que tienen los estudiantes con tres vecinos, entonces

$$\frac{y}{3} = \frac{x}{4}.$$

Si z es la cantidad de monedas que tiene el estudiante del centro con cinco vecinos, entonces

$$\frac{z}{5} = \frac{y}{3}.$$

Además, observando que hay 10 estudiantes con 4 vecinos, 5 estudiantes con 3 vecinos y sólo un estudiante con 5 vecinos, y entre ellos se distribuyen las 3360 monedas, entonces se debe cumplir que

$$10x + 5y + z = 3360.$$

De esta manera obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 4y - 3x &= 0 \\ 3z - 5y &= 0 \\ 10x + 5y + z &= 3360 \end{cases}$$

que tiene como solución $x = 224$, $y = 168$, y $z = 280$. Por lo que el estudiante del centro de la gráfica tenía originalmente 280 monedas.

Problema K Determina todas las maneras posibles en que se puede escribir 2012 como suma de números enteros positivos consecutivos.

Solución 1 La solución trivial es 2012.

Observemos que $2012 = 2^2 \cdot 503$, además si un número es la suma de dos o más números enteros positivos consecutivos entonces se puede expresar como

$$\begin{aligned} a + (a+1) + \cdots + (a+k) &= (k+1)a + (1 + 2 + \cdots + k) \\ &= (k+1)a + \frac{k(k+1)}{2} \\ &= \frac{k+1}{2}(2a + k) \end{aligned}$$

en donde a y k son enteros positivos. Tenemos tres opciones para $\frac{k+1}{2}$.

Caso 1. Si $\frac{k+1}{2} = 503$ entonces $2a + k = 4$, de donde

$$k = 2 \cdot 503 - 1 = 1005,$$
$$a = \frac{4 - 1005}{2} = -\frac{1001}{2}.$$

Lo cual no es posible, pues a no sería entero.

Caso 2. Si $\frac{k+1}{2} = 2$ entonces $2a + k = 1006$, de donde

$$k = 2 \cdot 2 - 1 = 3,$$
$$a = \frac{1006 - 3}{2} = \frac{1003}{2}.$$

Esta solución tampoco es factible, puesto que a no sería entero.

Caso 3. Si $\frac{k+1}{2} = 4$ entonces $2a + k = 503$, de donde

$$k = 2 \cdot 4 - 1 = 7,$$
$$a = \frac{503 - 7}{2} = 248.$$

Este caso genera la única solución, que es

$$2012 = 248 + 249 + 250 + 251 + 252 + 253 + 254 + 255.$$

Solución 2 La solución trivial es 2012.

Considerando dos casos para el número de sumandos enteros positivos tenemos.

Caso 1. Un número impar de sumandos.

$$\begin{aligned} a + (a+1) + \cdots + (a+2k) &= (2k+1)a + (1 + 2 + \cdots + 2k) \\ &= (2k+1)a + \frac{2k(2k+1)}{2} \\ &= (2k+1)(a+k) \end{aligned}$$

en donde a y k son enteros positivos.

Caso 2. Un número par de sumandos.

$$\begin{aligned} a + (a+1) + \cdots + (a+2k-1) &= 2ka + (1 + 2 + \cdots + 2k - 1) \\ &= 2ka + \frac{(2k-1)2k}{2} \\ &= (2a + 2k - 1)k \end{aligned}$$

en donde a y k son enteros positivos.

En cualquiera de los casos la suma se expresa como el producto de un número impar multiplicado por otro número entero. Considerando que $2012 = 2^2 \cdot 503$ entonces, para el Caso 1

$$\begin{aligned} 2k + 1 &= 503, \\ a + k &= 4. \end{aligned}$$

De donde $k = 251$ y $a = -247$, lo cual no es posible pues a sería negativo. Mientras que para el Caso 2

$$\begin{aligned} 2a + 2k - 1 &= 503, \\ k &= 4. \end{aligned}$$

De donde obtenemos $a = 248$, generando la única solución

$$2012 = 248 + 249 + 250 + 251 + 252 + 253 + 254 + 255.$$

Problema L Tenemos dos bolsas con canicas, una con P canicas y la otra con Q canicas. Podemos cambiar el número de canicas de las bolsas utilizando alguna de las siguientes dos reglas:

(a) Quitar de ambas bolsas la misma cantidad de canicas.

(b) Duplicar la cantidad de canicas en una de las bolsas.

¿Para qué parejas P y Q es posible terminar con ambas bolsas vacías?

Si se cambia la regla (b) por permitir triplicar la cantidad de canicas de una bolsa, ¿cómo cambia el resultado?

Solución Observemos que si $P = Q$ el problema se resuelve aplicando la regla (a), en caso contrario transformaremos el problema para llevarlo a este estado. Supongamos que $P \neq Q$ y observemos lo siguiente.

- Si $P = 0$ no se puede resolver el problema.
- Si $Q = 1$ y $P = 2$, se duplica Q aplicando (b), obteniendo la misma cantidad de monedas en ambas y luego se quita P de ambas aplicando (a) y obtenemos cero en ambas bolsas.
- Si $Q = 1$ y $P = 3$, se duplica Q, se quita 1 de ambas bolsas y se llega al caso $Q = 1$ y $P = 2$ que ya se sabe resolver.
- Si $Q = 1$ y $P = N$, se duplica Q, se quita 1 de ambas bolsas y se llega al caso $Q = 1$ y $P = N - 1$. Utilizando este procedimiento se llega al caso $Q = 1$ y $P = 2$ que ya se sabe resolver.
- Si $Q = M$ y $P = N$ con $M < N$, se quita $M - 1$ de ambas bolsas y se obtiene $Q = 1$ y $P = N - M + 1$, que ya se sabe resolver.

Por lo tanto, la solución son todas las parejas (P, Q) excepto los casos en los que alguno de ellos es cero y el otro no.

Supongamos que la regla (b) se cambia por triplicar la cantidad de canicas. Observemos que si se aplica la regla (b) no cambia la paridad de la cantidad en la bolsa donde se aplica la regla, mientras que si se aplica la regla (a) entonces la paridad de las cantidades en ambas bolsas cambia simultáneamente o se conserva. Por lo tanto tenemos lo siguiente.

- Si $Q = 1$ y $P = 2$, no se puede resolver.
- Si $Q = 1$ y $P = 3$, se triplica Q y se resta 3 de ambas bolsas.
- Si $Q = 1$ y $P = 4$, no se puede resolver.
- Si $Q = 1$ y $P = 5$, se triplica Q y se resta 2 de ambas bolsas llegando al caso $Q = 1$ y $P = 3$ que ya se sabe resolver.
- Si $Q = 1$ y $P = 6$, no se puede resolver.

En general tenemos que la solución son todas las parejas (P, Q) en donde P y Q tengan la misma paridad, excepto cuando uno de ellos es cero y el otro no.

Problema M Nueve personas van a cenar, tres piden bistec, tres piden pescado y tres piden carne de cerdo. Cuando el mesero trae sus platos, no

recuerda la orden de cada quien, así que les sirve los platos al azar. ¿De cuántas formas diferentes pudo haber servido el mesero los platos, si sólo una de las personas obtuvo el tipo de carne que pidió?

Solución Denotaremos por B al bistec, P al pescado y C a la carne de cerdo. Supongamos que la orden correcta de las nueve personas es

B	B	B	P	P	P	C	C	C

y supongamos que la que recibe su comida correcta es la primer persona. Una vez resuelto este caso bastará multiplicar por nueve para obtener las diferentes maneras en las que sólo una persona recibe el tipo de carne correcto.

Debemos distribuir B, B, P, P, P, C, C, C de manera que no aparezcan en el orden correcto. Dividimos este problema en cuatro casos observando que las otras dos personas que ordenaron B pueden recibir P o C.

Caso 1. | B | P | P | C | C | C | | | | sólo hay tres formas de distribuir las carnes que sobran B, B, y P

Caso 2. | B | C | C | | | | P | P | P | sólo hay tres formas de distribuir las carnes que sobran B, B y C

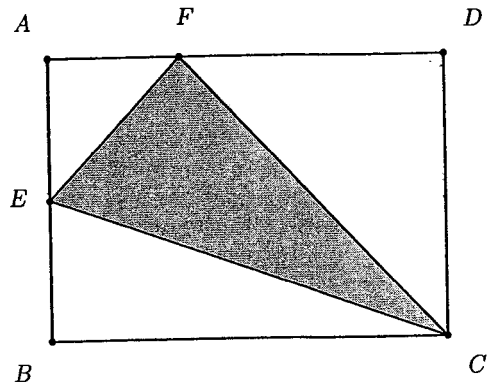
Caso 3. | B | P | C | | | | | | | para el primer bloque de tres personas hay tres formas de distribuir C, C, y B y para el segundo bloque de tres personas hay tres formas de distribuir P, P, y B. Obteniendo para este caso nueve formas diferentes.

Caso 4. | B | C | P | | | | | | | análogamente al caso anterior obtenemos nueve formas diferentes.

Sumando los resultados de los casos anteriores obtendríamos $3 + 3 + 9 + 9 = 24$ posibilidades cuando la primera persona recibe su comida correcta. Por lo tanto la respuesta es $9 \cdot 24 = 216$ formas diferentes.

Problema N Sean $ABCD$ un rectángulo, E cualquier punto en AB y F cualquier punto en AD. Demuestra que el área del rectángulo $ABCD$ es igual a la suma de dos veces el área de $\triangle CFE$ más $BE \cdot DF$.

Solución 1 Consideremos $a = AD = BC$, $b = AB = CD$, $x = BE$ y $y = DF$.



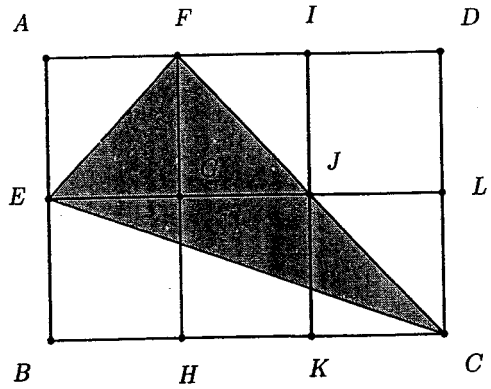
Tenemos que

$$\begin{aligned}(\triangle CFE) &= (ABCD) - (\triangle AEF) - (\triangle BCE) - (\triangle CDF)\\ &= ab - \frac{(a-y)(b-x)}{2} - \frac{ax}{2} - \frac{by}{2}\\ &= \frac{ab - xy}{2}\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(ABCD) = ab = 2(\triangle CFE) + xy = 2(\triangle CFE) + BE \cdot DF.$$

Solución 2 Sean G, H, I, J, K y L puntos como en la figura, en donde EL es paralelo a AD y por otro lado FH, IK y AB son paralelos entre sí.



Tomando en cuenta que cualquier diagonal de un rectángulo divide a éste en dos triángulos congruentes, entonces $(GHKJ) = (DIJL)$

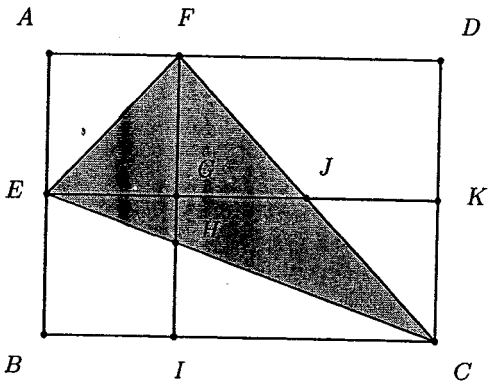
y por lo tanto $(GHCL) = (DIKC)$. Además como

$$\begin{aligned} 2(\triangle EJF) &= (AEJI) \\ 2(\triangle ECJ) &= (EBKJ) \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} 2(\triangle CFE) + BE \cdot DF &= 2(\triangle EJF) + 2(\triangle ECJ) + (GHCL) \\ &= (AEJI) + (EBKJ) + (DIKC) \\ &= (ABCD). \end{aligned}$$

Solución 3 Sean $a = (\triangle AEF)$, $b = (\triangle EGF)$, $c = (\triangle FGJ)$, $d = (FJKD)$, $e = (EBIH)$, $f = (\triangle HGE)$, $g = (\triangle HIC)$, $h = (GHCJ)$, $i = (\triangle CKJ)$ las áreas determinadas por los segmentos en la figura.



Tomando en cuenta que cualquier diagonal de un rectángulo divide a éste en dos triángulos congruentes, entonces

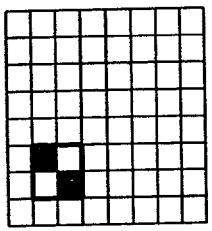
$$\begin{aligned} a &= b \\ e+g &= f+h+i \\ d+i &= c+h+g \end{aligned}$$

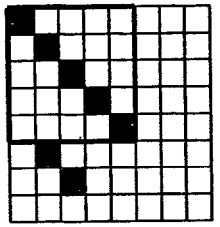
Utilizando estas igualdades tenemos

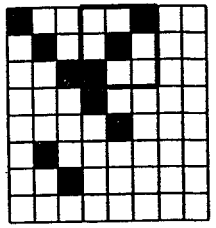
$$\begin{aligned} 2(CFE) + BE \cdot DF &= 2(b+c+f+h) + (g+h+i) \\ &= b+b+c+(c+h+g)+(f+h+i)+f+h \\ &= a+b+c+(d+i)+(e+g)+f+h \\ &= (ABCD) \end{aligned}$$

4.4. 26a OMM Selectivo Estado de Veracruz

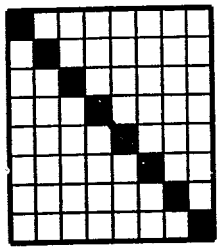
Problema O Dos jugadores A y B juegan alternadamente en una cuadrícula de $n \times n$. Una tirada consiste en escoger un entero $2 \leq m \leq n$ y una subcuadrícula de $m \times m$ contenida en la cuadrícula inicial, y pintar todos los cuadritos de 1×1 que están en una de las dos diagonales de dicha subcuadrícula. Además se tiene la restricción de que no se puede escoger una subcuadrícula que contenga cuadritos pintados previamente (ver el ejemplo que se ilustra abajo en la figura). Pierde el jugador que ya no puede realizar una tirada. Si A es el primero en tirar, ¿quién de A o B puede asegurar que ganará si juega de manera óptima?, ¿cómo debe proceder para asegurar su triunfo?

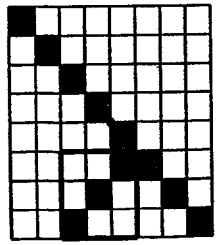

jugada de A, $m = 2$

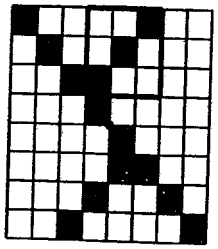

jugada de B, $m = 5$


jugada de A, $m = 3$

Solución El jugador A es quien puede asegurar su triunfo procediendo como a continuación se indica. En su primer turno A escoge $m = n$ y pinta todos los cuadritos de una de las diagonales. Después de que B juegue, A sólo refleja la jugada de B con respecto al centro del cuadrado de $n \times n$ como se ilustra en la figura.


jugada de A, $m = n = 8$


jugada de B, $m = 3$



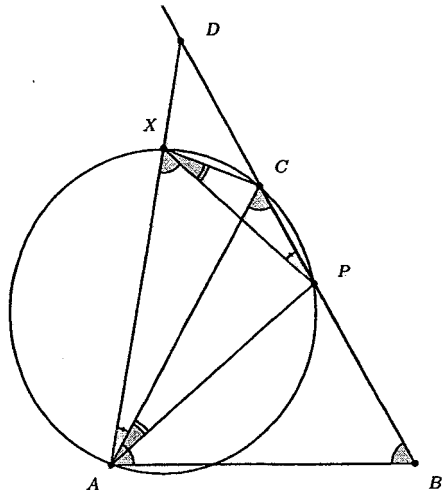
jugada de A, $m = 3$

Claramente A siempre podrá hacer esto puesto que B no puede escoger una subcuadrícula con cuadritos ya pintados, es decir B se ve obligado a tirar en uno de los dos lados que determinó A en su primer turno. Por lo tanto, si B puede pintar cuadritos en su turno, entonces también puede hacerlo A y así, el primero en no poder pintar cuadritos es B.

Problema P Sean $\triangle ABC$ un triángulo equilátero y D cualquier punto en la prolongación del lado BC (con C entre B y D). Sean P la intersección de la bisectriz del ángulo $\angle BAD$ con BC y X la intersección del circuncírculo del triángulo $\triangle APC$ con AD. Prueba que $AX = AC$.

Solución 1 Sean $\alpha = \angle CAP$, $\beta = \angle XAC$ y $\gamma = \angle APX$. Como $\triangle ABC$ es isósceles, entonces $\angle ABC = \angle ACB = \angle BAC = 60°$. Por otro lado, a ser $APCX$ un cuadri látero cíclico, se tienen las siguientes igualdades entre ángulos inscritos por abrazar un mismo arco en la circunferencia circunscrita.

$$\begin{aligned} \alpha &= \angle CAP = \angle CXP, \\ \beta &= \angle XAC = \angle XPC, \\ \gamma &= \angle APX = \angle ACX, \\ \angle AXP &= \angle ACP = 60°. \end{aligned}$$



Además también se cumple que $(\gamma+\beta)+(60°+\alpha) = 180°$, de donde

$$\gamma = 120° - \alpha - \beta.$$

Considerando que AP es bisectriz de $\angle BAD$, entonces $60° - \alpha = \alpha + \beta$, de donde

$$\beta = 60° - 2\alpha.$$

De esta forma, sustituyendo esta relación en la anterior, tenemos

$$\gamma = 120° - (60° - 2\alpha) = 60° + \alpha.$$

Lo cual implica que $\triangle CAX$ es isósceles con $AC = AX$.

Solución 2 Por ser $APCX$ un cuadrilátero cíclico, entonces los ángulos inscritos que abrazan un mismo arco en la circunferencia circunscrita son iguales, así

$$\angle AXP = \angle ACP = 60° = \angle ABP.$$

Además, como AP es bisectriz de $\angle BAD$, entonces

$$\angle XAP = \angle PAB.$$

Utilizando el criterio AA tenemos que los triángulos $\triangle XAP$ y $\triangle BAP$ son semejantes. Y como además dichos triángulos comparten el lado correspondiente AP, entonces ellos son congruentes. De esta manera

$$AX = AB = AC.$$

Problema Q Encuentra todos los enteros positivos a, b y p, con p número primo, que satisfacen la igualdad

$$a^3\left(b^2-p\right)=a^3+b^2-1.$$

Solución Observemos que la ecuación original es equivalente a

$$a^3b^2-a^3-b^2+1=pa^3,$$

factorizando el lado izquierdo de la ecuación tenemos

$$(a^3-1)(b^2-1)=pa^3.$$

Por lo tanto a^3-1 es un factor de pa^3; pero como a^3-1 y a^3 no tienen factores comunes mayores que 1, entonces a^3-1 es divisor de p. Luego, como p es primo, tenemos que $a^3-1=1$ o bien $a^3-1=p$. Para el caso en el que $a^3-1=1$, es decir $a^3=2$, no hay solución entera. Pero de nuevo, por ser p primo, tenemos que $a-1=1$ puesto que $a-1<a^2+a+1$; entonces $a=2$ y $p=7$. Sustituyendo en la ecuación original obtenemos $b=3$.

Problema R Sea $\mathcal{P}$ un polígono regular de 20 lados. Determina cuántos triángulos $\mathcal{T}$ con vértices en los vértices de $\mathcal{P}$ cumplen que ningún lado de $\mathcal{T}$ es también lado de $\mathcal{P}$.

Solución 1 Supongamos que en general tenemos un polígono de n lados y numeremos los vértices de $\mathcal{P}$ en forma consecutiva: $1,2,\ldots,n$.

Contemos los triángulos que tienen por vértice al que lleva el número 1, y sean $a<b$ los otros vértices.

- Si $a=3$, entonces b se puede escoger de $n-5$ formas, del 5 al $n-1$.
- Si $a=4$, entonces b se puede escoger de $n-6$ formas, del 6 al $n-1$, etc.
- La última posibilidad es $a=n-3$ y entonces b se puede escoger sólo de $1=n-(n-1)$ forma, es decir b debe ser igual a $n-1$.

Entonces los triángulos que tienen al vértice 1 son

$$(n-5)+(n-6)+\cdots+1=\frac{(n-4)(n-5)}{2}.$$

Como podemos hacer lo anterior para cada uno de los vértices, debemos multiplicar el resultado anterior por n y dividirlo entre 3 porque cada triángulo se cuenta tres veces (una por cada vértice). El resultado general es

$$\frac{n(n-4)(n-5)}{6}.$$

En el caso particular de $n=20$ tenemos que el resultado es

$$\frac{20\cdot 16\cdot 15}{6}=800.$$

Solución 2 Supongamos que en general tenemos un polígono de n lados y numeremos los vértices de $\mathcal{P}$ en forma consecutiva: $1,2,\ldots,n$.

Buscamos ternas (a,b,c) de elementos del conjunto $\{1,2,\ldots,n\}$ de manera que $a+1<b$, $b+1<c$ y $(a,c)\neq(1,n)$. Sin considerar la última condición tenemos $\binom{n-2}{3}$ posibilidades puesto que esto nos cuenta las formas de escoger números $a'<b'<c'$ dentro del conjunto $\{1,2,\ldots,n-2\}$, y una elección de estos determina la de a, b, c y recíprocamente, haciendo $a'=a$, $b'+1=b$ y $c'+2=c$. Ahora sólo tenemos que restar las ternas en que aparecen juntos 1 y n; éstas son $n-4$, pues el otro vértice debe ser alguno de entre los vértices $3,4,\ldots,n-2$. Entonces en general el número de triángulos buscados es

$$\binom{n-2}{3}-(n-4).$$

En el caso particular de $n=20$ tenemos que el resultado es

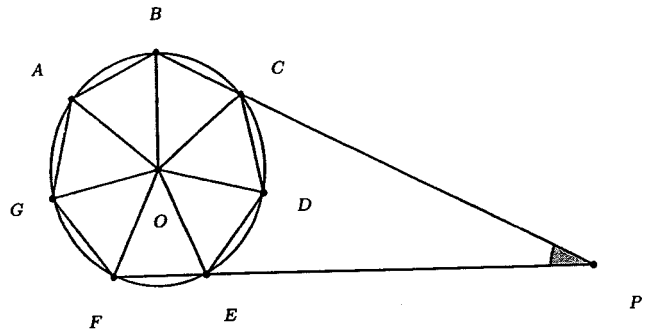
$$\binom{18}{3}-(16)=\frac{18\cdot 17\cdot 16}{6}-16=800.$$

Capítulo 5

Soluciones a los Problemas de Entrenamiento

Problema 01 (Problema A del Examen Estatal de la 16a OMM Veracruz de 2002) Los puntos A, B, C, D, E, F y G son los vértices de un heptágono regular (en el sentido de las manecillas del reloj). FE y BC se prolongan hasta cortarse en un punto P. ¿Cuánto vale el ángulo $\angle CPE$?

Solución Consideremos la circunferencia circunscrita al heptágono y denotemos por O el origen de la misma. De esta manera, cada lado del heptágono subtiene un arco de circunferencia cuya medida equivale a la de su ángulo central correspondiente, es decir $\frac{2\pi}{7}$.



Observemos que el ángulo $\angle CPE$ es igual al ángulo $\angle BPF$, el cual es un ángulo exterior de la circunferencia circunscrita, por lo que tenemos que

$$\angle CPE = \frac{\widehat{FB} - \widehat{EC}}{2} = \frac{\angle FOB - \angle EOC}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{6\pi}{7} - \frac{4\pi}{7}\right) = \frac{\pi}{7}.$$

Problema 02 (Problema B del Examen Estatal de la 11a OMM Veracruz de 1997) En la siguiente operación se han quitado todos los signos (dejando los símbolos $\triangle$) y el resultado de la misma (indicado por la letra R).

$$0\triangle 1\triangle 2\triangle 3\triangle 4\triangle 5\triangle 6\triangle 7\triangle 8 = R$$

Sabiendo que cada Δ representa un signo de $+$ o de $-$, ¿cuáles son los posibles valores distintos de R?

Solución Observemos que si todos los signos son $+$, el valor máximo de R es igual a 36, mientras que si todos los signos son $-$, el valor mínimo de R es igual a -36.

Ahora bien, tomemos los números en parejas, sin contar al 8, de la siguiente forma: 0 y 1, 2 y 3, 4 y 5, 6 y 7. Haciendo esto nos damos cuenta que, sea cual sea el signo que se coloque al operar estos números por pares, el resultado siempre es un número impar. Luego, nos restan 5 números (4 impares y el 8) por operar. Si operamos esos 4 números obtenidos anteriormente, el resultado será par (porque se suman por parejas; y sabemos que la suma de dos números impares es par y la suma de dos números pares es par) y finalmente, al operar ese par con el 8, el resultado es par. Entonces, sabemos que R será par siempre.

Si colocamos de manera inicial todos los signos positivos, podemos hacer lo siguiente:

- No cambiar signos: 1 posibilidad.
- Cambiar un sólo signo: 8 posibilidades.
- Cambiar dos signos, dejando fijo (por conveniencia) el número 8: 7 posibilidades.
- Cambiar tres signos, dejando fijos 7 y 8: 6 posibilidades.
- Cambiar cuatro signos, dejando fijos 6, 7 y 8: 5 posibilidades.
- Cambiar cinco signos, dejando fijos 5, 6, 7, 8: 4 posibilidades.
- Cambiar seis signos, dejando fijos del 4 al 8: 3 posibilidades.
- Cambiar siete signos, dejando fijos del 3 al 8: 2 posibilidades.
- Cambiar ochos signos: 1 posibilidad.

Entonces, sumando todas las posibilidades anteriores, tenemos que en total son 37 distintas, pues de esta forma garantizamos que ningún número se repita. Además 37 es la misma cantidad de números pares que hay entre -36 y 36, incluyendo a estos últimos.

En conclusión, los valores de R son los 37 pares que están entre -36 y 36.

$$R \in \{\pm 36, \pm 34, \pm 32, \pm 30, \pm 28, \pm 26, \pm 24, \pm 22, \pm 20, \pm 18, \pm 16, \pm 14, \pm 12, \pm 10, \pm 8, \pm 6, \pm 4, \pm 2, 0\}.$$

Problema 03 Calcula el producto de todos los enteros positivos menores que 100, y que tengan exactamente tres divisores positivos. Comprueba que dicho número es un cuadrado perfecto.

Solución 1 Revisando en orden, el primer número hallado es el 4. Luego descartamos los números primos, ya que estos tienen solamente 2 divisores positivos. Por otra parte, todos los números pares mayores que 4 tienen al menos 4 divisores positivos; también los descartamos. De los números impares restantes, descartamos a los que no son el cuadrado de un número primo, ya que tienen al menos 4 divisores. Así que sólo nos quedan los números 3^2, 5^2 y 7^2. Por lo tanto el número pedido es

$$(4)(9)(25)(49) = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7)^2 = (210)^2.$$

Solución 2 Por el teorema fundamental de la aritmética, todo número entero positivo $n > 1$ puede expresarse de modo único como el producto de números primos de la siguiente forma

$$n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_r^{m_r},$$

donde $p_1, p_2, \ldots, p_r$ son números primos distintos y $m_1, m_2, \ldots, m_r$ son números enteros positivos. De aquí, el número de divisores positivos de n es

$$(m_1 + 1)(m_2 + 1) \cdots (m_r + 1).$$

Por lo que si n tiene exactamente 3 divisores, debe ser de la forma p^2, donde p es un número primo y $p^2 < 100$. Entonces los números buscados son 2^2, 3^2, 5^2 y 7^2. El número solicitado es

$$(4)(9)(25)(49) = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7)^2 = (210)^2.$$

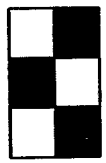
Problema 04 (Problema D del Examen Estatal de la 17a OMM Veracruz de 2003) En un juego de computadora se empieza con un tablero de 3×2 coloreado de blanco y negro, como se indica en el Tablero A. En cada jugada se eligen dos cuadritos que comparten un lado y se les cambia el color de acuerdo a las siguientes reglas:

- Negro cambia a Rojo.
- Rojo cambia a Blanco.
- Blanco cambia a Negro.

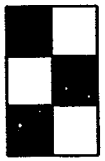
Con base en lo anterior:

(a) Describe una forma de convertir el Tablero A en el Tablero B, en 6 jugadas.

(b) Demuestra que no es posible convertir el tablero A en el B en menos de 6 jugadas.



Tablero A



Tablero B

Solución Primeramente daremos respuesta a la segunda pregunta.

(b) Observemos que un cuadro que originalmente está en negro cambiará a blanco después de realizar dos jugadas, es decir

$$\text{Negro} \xrightarrow{1a.\ \text{Jugada}} \text{Rojo} \xrightarrow{2a.\ \text{Jugada}} \text{Blanco}.$$

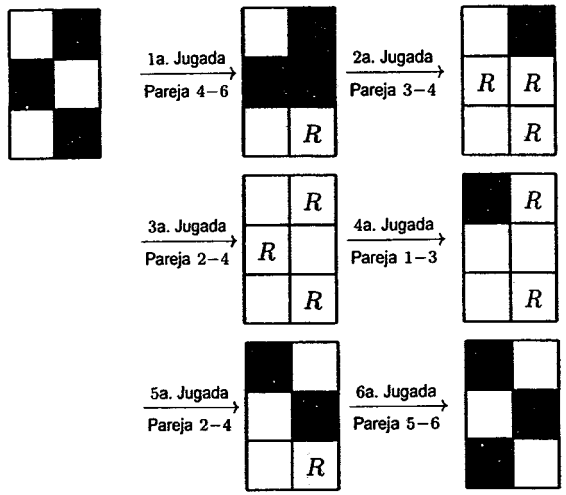
Dado que tenemos que cambiar los 3 cuadros negros y no podemos cambiar 2 o 3 de ellos a la vez, entonces el número mínimo de jugadas que debemos realizar está dado por

$$3(2) = 6.$$

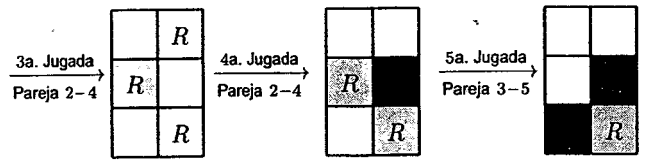
(a) Para dar respuesta a la primer pregunta enumeremos primero los cuadritos del tablero como sigue

1	2
3	4
5	6

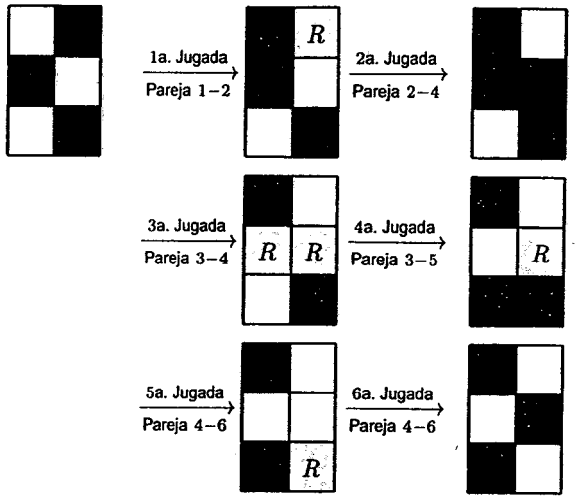
Solución 1. Sabemos que los cuadritos que originalmente son negros (los que corresponden con los números 2, 3 y 6) requieren de dos jugadas para convertirse en blancos, mientras que los cuadritos que originalmente son blancos (1, 4 y 5) requieren sólo una jugada para convertirse en negros. De esta manera si cambiamos a rojo (denotado por R) cada uno de los cuadritos negros, manteniendo sin cambio alguno los cuadritos blancos, obtendremos un tablero en blanco y rojo; si además esto lo hacemos en tres movimientos entonces habremos terminado ya que, en el arreglo actual, cada cuadrito blanco (rojo) cambiará a negro (blanco) en una sola jugada y dado que se conservó la distribución original de blancos, existirá uno en cada fila y en consecuencia bastarán tres movimientos para lograr una distribución como la solicitada en el tablero final.
En la siguiente figura podemos ver cuál es la pareja de cuadrito que debe cambiarse en cada jugada para obtener primero un tablero en blanco y rojo y después llevar éste al tablero final.



Observación. Observemos que, una vez que tenemos el tablero en blanco y rojo, las últimas tres jugadas pueden hacerse de manera ordenada considerando las parejas en cada fila. Asimismo, debemos tener cuidado de no suponer que obtendremos el tablero final tomando, en las tres últimas jugadas, cualquier pareja de cuadritos blanco-rojo como mostramos en la siguiente figura.



Solución 2. En este caso, usando la misma numeración de los cuadritos del tablero, realizamos dos jugadas para cambiar los cuadros 1 y 2 de nuestro tablero y las cuatro jugadas restantes para manipular los cuadritos 3-6 como vemos en la siguiente figura.



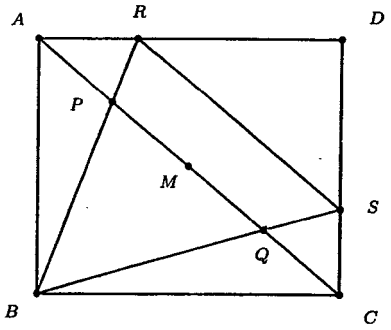
Problema 05 (Problema A del Examen Estatal de la 12a OMM Veracruz de 1998) Tenemos un rectángulo $ABCD$ con $AB = CD = a$, $BC = DA = b$ y $a < b$. Sea M el punto medio de AC y sean P y Q los puntos medios de AM y MC, respectivamente. Supongamos que la línea BP corta a AD en R y BQ corta a CD en S.

(a) Demuestra que RS es paralela a AC.

(b) Si $a = 3$ y $b = 4$, ¿ cuánto mide RS?

Solución (a) Por ser ángulos alternos internos en un sistema de rectas cortadas por una secante, tenemos que

$$\begin{aligned} \measuredangle ABQ &= \measuredangle CSQ, \\ \measuredangle BAQ &= \measuredangle SCQ. \end{aligned}$$



Por el criterio AA los triángulos $\triangle ABQ$ y $\triangle CSQ$ son semejantes con razón de semejanza igual a $\frac{1}{3}$, ya que el lado AQ es tres veces el lado QC.

De manera análoga podemos probar que los triángulos $\triangle APR$ y $\triangle CPB$ son semejantes con razón de semejanza igual a $\frac{1}{3}$.

De esta forma tenemos que $DS = \frac{2}{3}a$ y $DR = \frac{2}{3}b$ y por lo tanto

$$\frac{DS}{SC} = 2 = \frac{DR}{RA}.$$

En consecuencia R y S determinan segmentos proporcionales en los lados AD y CD de $\triangle ADC$, por lo que RS debe ser paralelo a AC.

Observación. La hipótesis $a < b$ no es requerida.

(b) Como RS y AC son paralelos, entonces $\triangle ADC$ y $\triangle RDS$ son semejantes con razón de semejanza igual a $\frac{2}{3}$. Y como la hipotenusa de $\triangle ADC$ es 5, puesto que $a = 3$ y $b = 4$, entonces la hipotenusa de $\triangle RDS$ es igual a $\frac{10}{3}$.

Problema 06 Demuestra que en cualquier partición del conjunto $\{1, 2, \ldots, 9\}$ en tres subconjuntos, hay uno de ellos que cumple que el producto de sus números es mayor que 71.

Solución Supongamos que el conjunto $\{1, 2, \ldots, 9\}$ se parte en tres subconjuntos ajenos dos a dos A, B y C, en donde el producto de los elementos de cada subconjunto es a, b y c respectivamente. Si a, b y c son menores o iguales que 71, entonces el producto

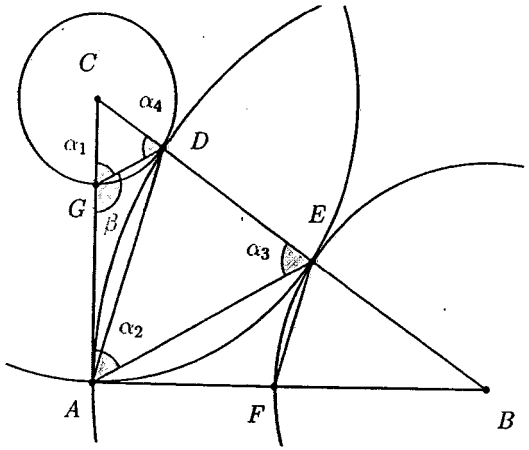
$$abc \leq 71^3 = 357911.$$

Por otro lado, el producto de los elementos del conjunto $\{1, 2, \ldots, 9\}$ es $9! = 362880$, que es mayor que $357911 = 71^3$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, al menos uno de los conjuntos A, B o C tiene producto mayor que 71.

Problema 07 (Problema A del Examen Estatal de la 11a OMM Veracruz de 1997) Tenemos un triángulo rectángulo $\triangle ABC$. Sobre la hipotenusa BC se marcan puntos D y E tales que $BD = BA$ y $EC = AC$. Después se marca un punto F en el lado AB de tal forma que $BF = BE$ y análogamente un punto G en el lado AC de manera que $GC = DC$. Demuestra que los puntos A, D, E, F y G están sobre una misma circunferencia.

Solución 1 Sabemos que por tres puntos pasa una única circunferencia, consideraremos el circuncírculo de $\triangle AED$ y demostraremos que a tal circuncírculo también pertenecen los puntos G y F. Sean α_1, α_2, α_3, α_4 y β los ángulos marcados en la figura.



Al ser $\triangle CGD$ y $\triangle CAE$ triángulos isósceles que comparten el ángulo $\angle C$, ellos son semejantes, por lo que

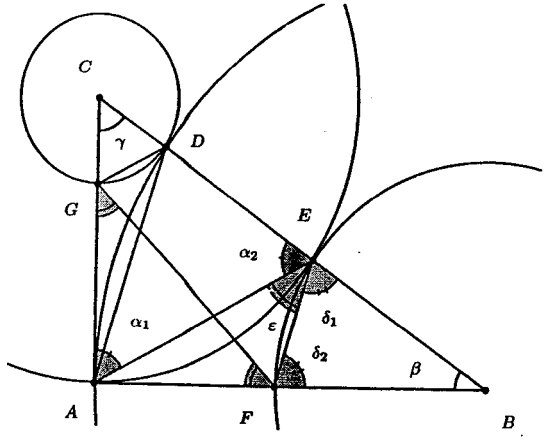
$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4.$$

De esta manera

$$\beta + \alpha_3 = \beta + \alpha_1 = 180°,$$

por lo que $AEDG$ es cíclico. De manera semejante podemos demostrar que $AFED$ es cíclico. Y como ambos cuadriláteros comparten los vértices A, E y D, entonces los puntos G y F están en el circuncírculo de $\triangle AED$, de donde concluimos que A, D, E, F y G están sobre una misma circunferencia.

Solución 2 Demostraremos que los puntos E y D pertenecen al circuncírculo de $\triangle AFG$. Sean α_1, α_2, β, γ, δ_1, δ_2 y ε los ángulos marcados en la figura.



Como $BD = BA$, $BF = BE$, $EC = AC$ y $GC = DC$, entonces

$$AF = BA - BF = BD - BE = DE,$$
$$AG = CA - CG = CE - CD = DE..$$

Por lo que $\triangle AFG$ es isósceles con $\angle AGF = \angle AFG = 45°$, ya que $\angle FAG = 90°$.

Además, al ser $\triangle CAE$ y $\triangle BEF$ triángulos isósceles, entonces $\alpha_1 = \alpha_2$ y $\delta_1 = \delta_2$, por lo que $2\alpha_2 + \gamma = 180°$ y $2\delta_1 + \beta = 180°$, de donde

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= 90° - \frac{1}{2}\gamma, \\ \delta_1 &= 90° - \frac{1}{2}\beta. \end{aligned}$$

Por otro lado $\alpha_2 + \varepsilon + \delta_1 = 180°$, de donde obtenemos

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 180° - \alpha_2 - \delta_1 \\ &= 180° - \left(90° - \frac{1}{2}\gamma\right) - \left(90° - \frac{1}{2}\beta\right) \\ &= \frac{1}{2}(\gamma + \beta) \\ &= 45°. \end{aligned}$$

De esta forma $\varepsilon = 45° = \angle AGF$, lo cual implica que E pertenece al circuncírculo de $\triangle AFG$. De manera semejante podemos probar que $\angle ADG = 45° = \angle AFG$, de donde concluimos que D también pertenece al circuncírculo de $\triangle AFG$.

Problema 08 (Problema B del Examen Estatal de la 16a OMM Veracruz de 2002) El número 2002 es un número *capicúa* porque se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. ¿Cuánto vale la suma de todos los números capicúas de cuatro dígitos?

Solución Para determinar los números capicúa de 4 dígitos, basta considerar los primeros dos dígitos, y los restantes serán su reflejo, por ejemplo 91|19. Al número lo podemos obtener sumando los primeros dos dígitos y luego sumar su reflejo, por ejemplo a 9119 lo descomponemos como 9100 y 19.

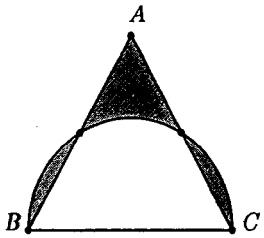
Los números de 2 dígitos son del 01 al 99, y descartaremos los primeros diez, los del 00 al 09. Así que la suma total de los capicúas es

$$\begin{aligned} &(0100 + 0200 + \cdots + 9900) + (1 + 2 + \cdots + 99) \\ &\quad - (0100 + 0200 + \cdots + 0900) - (10 + 20 + \cdots + 90) \\ &\quad = 100(1 + 2 + \cdots + 99) + (1 + 2 + \cdots + 99) \\ &\qquad - 100(1 + 2 + \cdots + 9) - 10(1 + 2 + \cdots + 9) \\ &\quad = 101(1 + 2 + \cdots + 99) - 110(1 + 2 + \cdots + 9). \end{aligned}$$

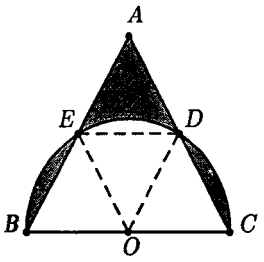
Ya que la suma de los números de 1 a n es $\frac{n(n+1)}{2}$, el resultado es

$$\begin{aligned} &101(1+2+\cdots+99)-110(1+2+\cdots+9)\\ &\quad=101\cdot 99\cdot 50-110\cdot 9\cdot 5\\ &\quad=495000. \end{aligned}$$

Problema 09 (Problema B del Examen Estatal de la 17a OMM Veracruz de 2003) En la siguiente figura el triángulo $\triangle ABC$ es equilátero, tiene lado 2 y la semicircunferencia tiene diámetro BC. ¿Cuánto vale el área sombreada?.



Solución Denotemos por E, D y O los puntos medios de los lados AB, AC y BC, respectivamente; de esta manera tenemos que los triángulos $\triangle AED$, $\triangle EBO$ y $\triangle DOC$ son isóceles con la característica de que el ángulo formado por los lados que miden 1 es de 60°, es decir, se trata de triángulos equiláteros congruentes entre sí y por el criterio LLL, lo son también con el $\triangle EDO$ y equivalen a $\frac{1}{4}$ del triángulo $\triangle ABC$.



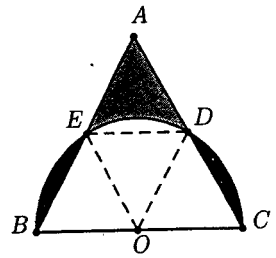
Por el Teorema de Pitágoras, podemos calcular la altura de cualquiera de estos triángulos, la cual es igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}$, en consecuencia, el área de cada uno de estos triángulos, denotada por A_T, está dada por

$$A_T=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Consideremos ahora cualquiera de los sectores circulares BOE, EOD o DOC, recordemos que el ángulo que abrazan es de 60° y dado que el diámetro de la semicircunferencia es $BC=2$, entonces el área de cada sector circular, que denotaremos por A_C, es la tercera parte del área de la semicircunferencia, esto es

$$A_C=\frac{\pi}{6}.$$

Finalmente observemos que el área original puede ser considerada como en la siguiente figura



en donde el área sombreada dentro de $\triangle AED$ equivale a $2A_T-A_C$ mientras que cada una de las áreas en negro es igual a A_C-A_T. Por lo tanto, el área total está dada por

$$2(A_C-A_T)+(2A_T-A_C)=A_C=\frac{\pi}{6}.$$

Problema 10 Calcular la suma

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{999\cdot 1001}.$$

Solución 1 Para cada $n\geq 1$ definamos

$$k_n=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$$

Para $n=1$, tenemos que

$$k_1=\frac{1}{3}=\frac{1}{2\cdot 1+1}.$$

Demostraremos que en general, $k_n=\frac{n}{2n+1}$. Ya se cumple para $n=1$, ahora supongamos que se cumple para cierto número p, por

lo que $k_p = \dfrac{p}{2p+1}$, usando esto tenemos

$$\begin{aligned} k_{p+1} &= \frac{1}{1\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(2p-1)(2p+1)} + \frac{1}{(2p+1)(2p+3)} \\ &= k_p + \frac{1}{(2p+1)(2p+3)} \\ &= \frac{p}{(2p+1)} + \frac{1}{(2p+1)(2p+3)} \\ &= \frac{p(2p+3)+1}{(2p+1)(2p+3)} \\ &= \frac{(2p+1)(p+1)}{(2p+1)(2p+3)} \\ &= \frac{p+1}{2(p+1)+1}. \end{aligned}$$

Al sustituir $n = 500$ en la fórmula demostrada, obtenemos

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{999\cdot 1001} = k_{500} = \frac{500}{1001}.$$

Solución 2 Notemos que para cada número entero positivo k

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2(2k-1)} - \frac{1}{2(2k+1)}.$$

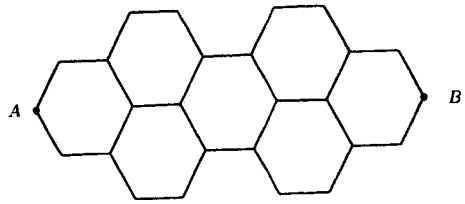
En consecuencia tenemos

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{10}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n+1)}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)} \\ &= \frac{n}{2n+1}. \end{aligned}$$

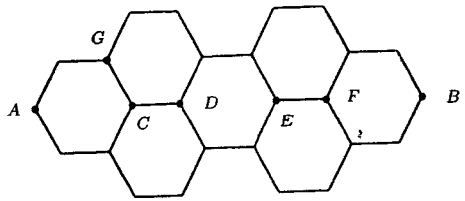
Finalmente al sustituir $n = 500$ en la fórmula anterior tenemos

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{999\cdot 1001} = S_{500} = \frac{500}{1001}.$$

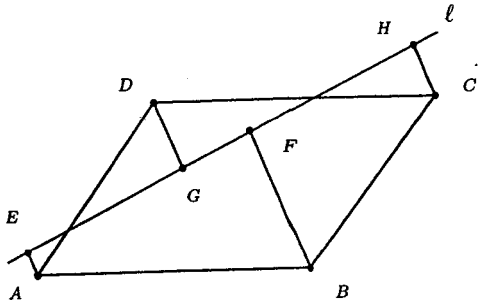
Problema 11 (Problema B del Examen Estatal de la 19a OMM Veracruz de 2005) ¿Cuántos caminos hay del punto A al punto B siguiendo las líneas de la figura, si las direcciones permitidas son $\rightarrow$, $\nearrow$, $\searrow$, $\swarrow$, $\nwarrow$ (es decir, cualquier sentido está permitido salvo $\leftarrow$) y no se permite pasar dos veces por el mismo punto?



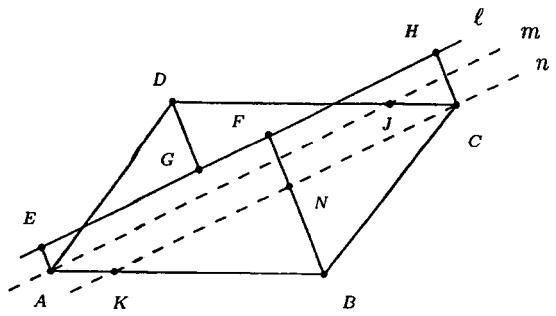
Solución Observemos que del punto A al punto C podemos llegar de dos formas y también que para llegar del punto C al punto D hay tres caminos distintos. Sin embargo, para ir del punto A al punto D, no es necesario pasar por C. Por ejemplo, podemos partir del punto A y subir al punto G y, si no queremos pasar por C, subimos y seguimos el camino hasta D. Sin embargo, el punto G pertenece a uno de los tres caminos que van de C a D, por lo que para ir del punto A al punto D, aún sin pasar por C, tenemos $2\cdot 3 = 6$ caminos. Lo mismo ocurre con cada uno de los vértices intermedios restantes E y F. Finalmente, del punto A al punto B hay $2\cdot 3\cdot 2\cdot 3\cdot 2 = 72$ caminos.



Problema 12 (Problema C del Examen Estatal de la 18a OMM Veracruz de 2004) La figura $ABCD$ es un paralelogramo, ℓ es una recta que corta los lados AD y CD del paralelogramo; E, F, G y H son puntos de la recta ℓ tales que AE, BF, DG y CH son todos perpendiculares a ℓ, además $AE = 4$, $GD = 7$ y $CH = 5$. ¿Cuánto mide BF?



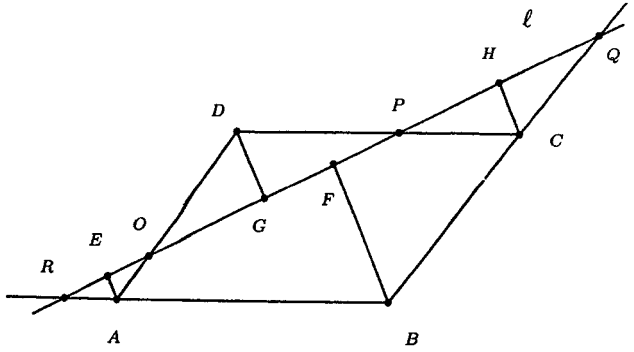
Solución 1 Sean m y n las rectas paralelas a ℓ que pasan por los vértices A y C respectivamente. Denotemos por J al punto de intersección entre m y DC, además denotemos por K y N a los puntos de intersección de n con AB y FB respectivamente, como en la siguiente figura.



Observemos que los triángulos $\triangle ADJ$ y $\triangle CBK$ son congruentes por lo que sus alturas son iguales es decir, $DG+EA = BN$. Sustituyendo los valores correspondientes tenemos que $BN = 11$. Como $NF = CH$ entonces concluimos que

$$BF = BN + NF = BN + CH = 11 + 5 = 16.$$

Solución 2 Sean O, P, R y Q los puntos de intersección de ℓ con AD y DC y las prolongaciones de AB y BC respectivamente, como en la siguiente figura.



De esta manera tenemos que $\triangle ARO$ y $\triangle CPQ$ son semejantes a $\triangle DPO$. Entonces se cumplen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \frac{RO}{PO} &= \frac{AO}{DO}, \\ \frac{PQ}{PO} &= \frac{CQ}{DO}. \end{aligned}$$

Dado que los segmentos AE, CH y DG son perpendiculares a ℓ, corresponden a las alturas de los triángulos semejantes antes mencionados trazadas desde A, C y D respectivamente. Por lo que también se cumplen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \frac{AE}{DG} &= \frac{AO}{DO}, \\ \frac{CH}{DG} &= \frac{CQ}{DO}. \end{aligned}$$

Si consideramos las relaciones anteriores, así como las correspondientes longitudes para AE, CH y DG obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{RO}{PO} &= \frac{AE}{DG} = \frac{4}{7}, \\ \frac{PQ}{PO} &= \frac{CH}{DG} = \frac{5}{7}. \end{aligned}$$

De manera similar, considerando que los triángulos $\triangle BRQ$ y $\triangle DPO$ son semejantes y que BF y DG corresponden a las respectivas alturas trazadas desde B y D, tenemos que

$$\frac{BF}{DG} = \frac{RQ}{PO}.$$

Dado que $RQ = RO + OP + PQ$ y usando las relaciones obtenidas anteriormente, tenemos que

$$\frac{BF}{DG} = \frac{RO}{PO} + \frac{OP}{PO} + \frac{PQ}{PO} = \frac{4}{7} + 1 + \frac{5}{7} = \frac{16}{7}.$$

Por lo tanto, dado que $DG = 7$, obtenemos $BF = 16$.

Problema 13 (Problema B del Examen Estatal de la 18a OMM Veracruz de 2004) La suma de 5 enteros positivos es 100. ¿Cuál es la mayor diferencia que pueden tener los dos más cercanos?

Solución Sean a, b, c, d, e números enteros positivos tales que

$$a + b + c + d + e = 100.$$

Supongamos, sin perder generalidad, que $a \leq b \leq c \leq d \leq e$, y que la diferencia entre los dos más cercanos es n. De este modo, tenemos que

$$\begin{aligned} a+n &\leq b, \\ b+n &\leq c, \\ c+n &\leq d, \\ d+n &\leq e. \end{aligned}$$

Si en la primer desigualdad, sumamos n, obtenemos $a+2n \leq b+n$, lo cual, combinado con la segunda desigualdad, nos da $c \geq b+n \geq a+2n$, es decir, $c \geq a+2n$. Ahora, a esta desigualdad, le sumamos n

a ambos miembros, y obtenemos $c+n \geq a+3n$, lo cual, combinado con la tercer desigualdad nos da $d \geq c+n \geq a+3n$. De modo similar, obtenemos $d \geq a+4n$. Resumiendo, tenemos

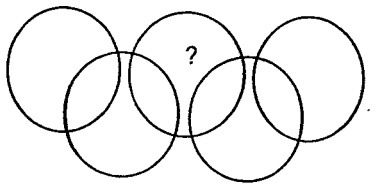
$$\begin{aligned} a &\geq a, \\ b &\geq a+n, \\ c &\geq a+2n, \\ d &\geq a+3n, \\ e &\geq a+4n. \end{aligned}$$

Sumando las anteriores desigualdades, obtenemos

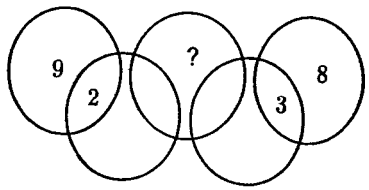
$$100 = a+b+c+d+e \geq 5a+10n,$$

y como $a \geq 1$, obtenemos $100 \geq 5a+10n \geq 5+10n$, esto es, $95 \geq 10n$, por lo que $n \leq 9.5$, esto es, $n \leq 9$. Tomando $a=1$, $b=10$, $c=19$, $d=28$ y $e=42$, tenemos que la diferencia más pequeña es 9, por lo que el número buscado es 9.

Problema 14 (Problema A del Examen Estatal de la 24a OMM Veracruz de 2010) En la figura hay 9 regiones dentro de los círculos. Si se escriben los números del 1 al 9, exactamente uno en cada región, de manera que la suma de los números en cada círculo sea 11, ¿qué número va en el lugar del signo de interrogación?



Solución Debido a que no podemos repetir números, la única posibilidad para que la suma de algún número y 9 sea 11 es sumándolo con el 2; una vez que hemos utilizado el 2, la posibilidad de considerar que $8+2+1=11$ queda descartada, de esta manera, la única posibilidad para que 8 sume 11 es sumándolo con el 3. Tenemos entonces que los números 9 y 2, así como 8 y 3, deben ser colocados en el mismo círculo y éste debe ser tal que sólo contenga dos regiones a ocuparse, en consecuencia las parejas formadas por 9 y 2 así como 8 y 3 deben ser colocadas en los extremos de la figura, es decir

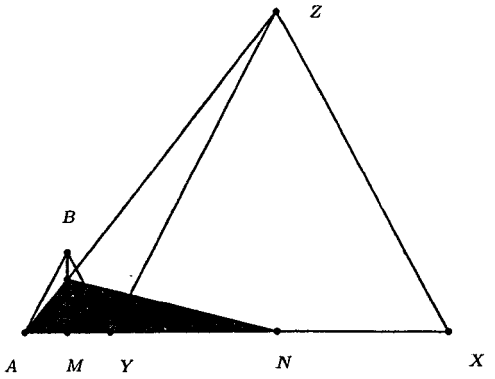


De esta manera, los números que faltan colocar en alguna de las regiones son: 1, 4, 5, 6 y 7. En el círculo en el que hemos colocado el número 2, tenemos dos regiones vacías en las que debemos colocar números que sumen 9, considerando los números arriba mencionados, nuestra única opción es colocar en estas regiones los números 4 y 5. De manera similar, en el círculo donde se colocó el número 3, deberán estar los números 1 y 7.

En conclusión, el número que deberíamos colocar en lugar del signo de interrogación es el 6.

Observación. Los argumentos usados en esta solución son válidos si las parejas formadas por 9 y 2 así como 8 y 3 se colocan de manera simétrica a la mostrada en la figura.

Problema 15 Si $AY=1$ y $XY=4$, los triángulos $\triangle ABY$ y $\triangle XYZ$ son equiláteros y M y N son puntos medios de los segmentos AY y XZ, ¿cuánto vale el área sombreada?



Solución Llamaremos C al punto donde se intersecan los segmentos AZ y MB. Calculemos la longitud del segmento NZ usando el Teorema de Pitágoras,

$$\begin{aligned} (ZX)^2 &= (XN)^2+(NZ)^2, \\ (4)^2 &= (2)^2+(NZ)^2. \end{aligned}$$

De donde obtenemos que $NZ=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$. Ahora, ambos ángulos $\measuredangle AMB$ y $\measuredangle YNZ$ miden 90°, ya que BM y ZN son las medianas de un triángulo equilátero. Así, por el criterio AA, tenemos que $\triangle ACM$ y $\triangle AZN$ son semejantes. Por lo tanto $\dfrac{ZN}{CM}=\dfrac{AN}{AM}$, de donde podemos obtener el valor de CM,

$$CM=\frac{(ZN)(AM)}{AN}=\frac{2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right)}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Finalmente, el área de $\triangle ACN$ es

$$\frac{(AY+YN)(CM)}{2} = \frac{3\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Problema 16 Determina cuáles enteros positivos z cumplen las siguientes condiciones.

- Que la suma de los dígitos de z sea igual a 18.
- Que el número z incrementado en 3600 sea un cuadrado perfecto.
- Que z sea menor que 2012.

Solución Consideremos primero la condición de que z incrementado en 3600 es un cuadrado perfecto al cual llamaremos n^2, es decir

$$z + 3600 = n^2.$$

A partir de aquí tenemos que $z = n^2 - 3600$ por lo que podemos ver que

- n no puede ser menor o igual a 60 pues esto nos llevaría a tener valores de z no positivos;
- de igual forma, n no puede ser mayor o igual a 75 pues tendríamos valores de z mayores o iguales a 2025, contradiciendo la condición de que z sea menor que 2012.

De esta manera, hemos acotado las posibilidades para n y, a partir de éstas, hallaremos los valores de z para después seleccionar aquellos que satisfagan la condición de que sus dígitos sumen 18.

Valor de n	Valor obtenido para $z = n^2 - 3600$
61	121
62	244
63	369
64	496
65	625
66	756
67	889
68	1024
69	1161
70	1300
71	1441
72	1584
73	1729
74	1876

De la tabla anterior podemos ver que los únicos números z cuyos dígitos suman 18 son 369, 756 y 1584 siendo estos la respuesta a nuestro problema.

Problema 17 ¿Para qué números naturales n la suma de los divisores de 10^n es múltiplo de 9?.

Solución Factorizando a 10^n, tenemos que $10^n = 2^n 5^n$. Por lo tanto, los divisores positivos de 10^n son todos los números de la forma $2^k 5^j$, donde k y j son números enteros entre 0 y n. De este modo, la suma de los divisores de 10^n es

$$D_n = (1+2+\cdots+2^n)(1+5+\cdots+5^n).$$

Ahora demostraremos que si n es impar, entonces 3 divide a $1+2+\cdots+2^n$ y también a $1+5+\cdots+5^n$. Demostraremos esto sólo para el primer caso.

Queremos probar que 3 divide a $1+2+\cdots+2^{2k-1}$, donde k es cualquier número entero positivo. Procederemos por inducción.

Si $k=1$, entonces $1+2=3$, lo cual es divisible por 3. Supongamos que 3 divide a $1+2+\cdots+2^{2k-1}$, esto es

$$1+2+\cdots+2^{2k-1} \equiv 0 \pmod 3.$$

Entonces las siguientes relaciones son equivalentes

$$\begin{aligned} 1+2+\cdots+2^{2k-1}+2^k+2^{2k+1} &\equiv 0 \pmod 3 \\ 0+2^k+2^{2k+1} &\equiv 0 \pmod 3 \\ 2^k(1+2) &\equiv 0 \pmod 3 \\ 2^k(3) &\equiv 0 \pmod 3 \end{aligned}$$

Del mismo modo, se puede probar que 3 divide a $1+5+\cdots+5^{2k-1}$ para cualquier número k. Por lo tanto, $9=(3)(3)$ divide a D_{2k-1}.

Por otro lado, si n es un número par, esto es, de la forma $n=2k$ para algún entero positivo k, entonces 3 no divide a $1+2+\cdots+2^{2k}$, ya que

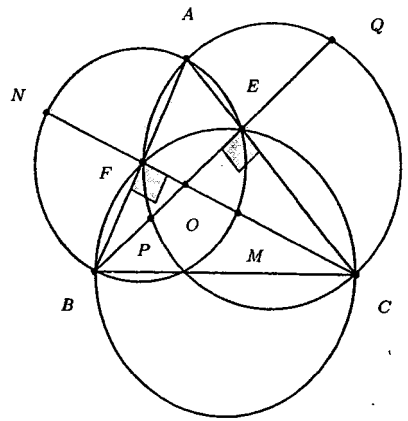
$$1+2+\cdots+2^{2k} = \left(1+2+\cdots+2^{2k-1}\right)+2^{2k},$$

y 3 divide al primer sumando, por lo que ya probamos, pero 3 no divide a 2^{2k}. Del mismo modo, 3 no divide a $1+5+\cdots+5^{2k}$, y por ser 3 un número primo, entonces 3 no divide a D_{2k}, y 9 tampoco lo hace.

En conclusión, solamente para los números impares n, la suma de los divisores positivos de 10^n es divisible por 9.

Problema 18 Consideremos un triángulo acutángulo $\triangle ABC$. La circunferencia de diámetro AB interseca la altura CF (y su prolongación) en M y N, la circunferencia de diámetro AC interseca la altura BE (y su prolongación) en P y Q. Demuestra que M, N, P y Q están en una misma circunferencia.

Solución 1 Sea O la intersección de CN y BQ.



Como F es el pie de la altura desde C, entonces $\angle AFC = 90°$ y así A, Q, C, P y F están en la misma circunferencia. La potencia desde O es

$$OP \cdot OQ = OC \cdot OF.$$

De la misma forma, como E es el pie de la altura desde B, entonces $\angle AEB = 90°$ y así A, N, B, M y E están en la misma circunferencia, de donde

$$OB \cdot OE = OM \cdot ON.$$

Además, como $\angle BFC = 90° = \angle BEC$, entonces $FBCE$ es cíclico. De esta manera, obtenemos la siguiente relación

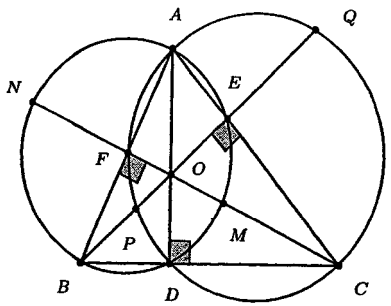
$$OB \cdot OE = OC \cdot OF.$$

Luego, utilizando las relaciones obtenidas, tenemos

$$OP \cdot OQ = OC \cdot OF = OB \cdot OE = OM \cdot ON.$$

Concluimos que P, Q, M y N pertenecen a una misma circunferencia.

Solución 2 Sean D el pie de la altura desde A y O el ortocentro de $\triangle ABC$.



Como $\angle ADB = 90°$ y abraza al diámetro AB, entonces D pertenece a la circunferencia de diámetro AB. De la misma manera podemos probar que D pertenece también a la circunferencia de diámetro AC. Luego, calculando la potencia desde O respecto a la circunferencia de diámetro AB, tenemos

$$AO \cdot OD = MO \cdot ON.$$

De igual manera la potencia desde O respecto a la circunferencia de diámetro AC es

$$PO \cdot OQ = AO \cdot OD.$$

Finalmente, por las relaciones anteriores, $MO \cdot ON = PO \cdot OQ$ y así M, N, P y Q pertenecen a una misma circunferencia.

Problema 19 En un pizarrón un maestro escribe dos cantidades: 10 y 20, y pide a sus alumnos que por turnos resten o añadan 1 a sólo una de las cantidades y escriban el resultado. Si al final quedaron los números 20 y 10, demuestra que en algún momento estuvieron escritos números idénticos.

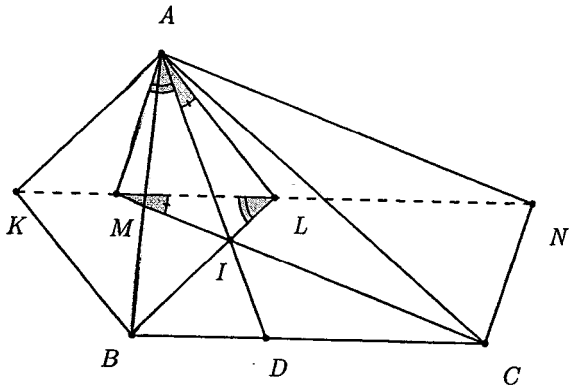
Solución Denotemos por A y B las posiciones en el pizarrón en las cuales se asignan los números. Entonces se tiene

	Posición A	Posición B
Distribución inicial	10	20
Distribución final	20	10

De esta manera tenemos que al inicio la diferencia $B - A$ era de 10 unidades mientras que al final es de -10, dado que en cada movimiento sólo se puede añadir o restar una unidad entonces, la diferencia $B - A$ debió ser cero en algún momento, es decir, los números en ambas posiciones eran iguales (sin importar cuáles eran).

Problema 20 Sean $\triangle ABC$ un triángulo y K, L, M y N las proyecciones de A sobre la bisectriz externa de $\angle B$, la bisectriz interna de $\angle B$, la bisectriz interna de $\angle C$ y la bisectriz externa de $\angle C$, respectivamente. Muestra que K, L, M y N son colineales.

Solución Sea I la intersección de las bisectrices internas de B y C, esto es el incentro del triángulo $\triangle ABC$. Llamemos D a la intersección de BC con la prolongación de AI y sean $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle ABC$ y $\gamma = \angle BCA$.



Fijándonos en el triángulo $\triangle ADB$ tenemos $\angle ADB = 180° - \beta - \frac{1}{2}\alpha$. El ángulo $\angle IDC$ es suplementario al anterior, por lo que $\angle IDC = \beta + \frac{1}{2}\alpha$. De este modo

$$\begin{aligned} \angle CID &= 180° - \angle IDC - \angle DCI \\ &= 180° - \beta - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\gamma \\ &= 180° - \frac{1}{2}(\beta + \alpha + \gamma) - \frac{1}{2}\beta \\ &= 90° - \frac{1}{2}\beta. \end{aligned}$$

Como los ángulos $\angle AIM$ y $\angle CID$ son opuestos por el vértice y el triángulo $\triangle AMI$ es rectángulo, entonces

$$\angle AIM = 90° - \frac{1}{2}\beta = 90° - \angle MAI,$$

de esto deducimos que $\angle MAI = \frac{1}{2}\beta$.

Ahora, como $\angle AMI = \angle ALI = 90°$, entonces $AMIL$ es cíclico, por lo que $\frac{1}{2}\beta = \angle MAI = \angle MLI = \angle MLB$. Por otro lado, como $\angle KBI = \angle AKB = 90°$, entonces KA y BL son paralelas y tenemos que $\angle KAB = \angle ABL = \frac{1}{2}\beta = \angle MLB$. Además, como $AKBL$ es un rectángulo, tenemos que $\angle KLB = \angle KAB = \frac{1}{2}\beta = \angle MLB$. Con esto, se concluye que K, L y M son colineales.

De igual modo se prueba que M, L y N son colineales.

Problema 21 ¿Cuántos números de cuatro cifras cumplen la propiedad de que el producto de dichas cifras es un cuadrado perfecto?

Solución Contaremos por casos.

Caso 1. Números de 4 cifras con al menos un cero hay $9000 - 9^4 = 2439$ (pues hay 9^4 números sin ceros).

Caso 2. Los números que no tienen ceros conviene separarlos en casos según el número de cifras que tengan iguales.

- Los números con todas las cifras iguales (de la forma $aaaa$) son 9 y todos cumplen la condición de que el producto de las cifras es cuadrado.
- Los números con tres cifras iguales y la otra distinta son de la forma $aaab$, $aaba$, $abaa$ o $baaa$. De aquí que deberemos analizar las distintas posibilidades para a y b (según la condición del problema) y después multiplicar por 4 (para considerar la posición de b en el número), éstas son de dos tipos. El primer tipo es cuando ambos a y b son cuadrados (es decir, 1, 4 ó 9), lo que nos da (3)(2) posibilidades. El segundo tipo es cuando a y b son los números 2 y 8 (en cualquier orden) lo cual nos da otras dos posibilidades. En total en este caso tenemos $4[(3)(2) + 2] = 32$ posibilidades.
- Los números con dos cifras iguales y otras dos distintas: $aabc$ con a, b y c todos distintos entre sí y las distintas posibilidades de orden de a, b y c que son 12 (pues la posición de b se puede elegir entre 4 posiciones y entonces la de c, de 3). Analicemos las posibilidades para a, b y c en el número $aabc$ y después multiplicaremos por 12 para considerar las distintas posiciones. La primera posibilidades es que b y c sean cuadrados y a cualquier otro dígito (distinto de b y c); en este caso hay que escoger dos de los tres números 1, 4 y 9, lo cual es $\binom{3}{2} = 3$ (aquí no debemos considerar el orden entre b y c pues cuando multipliquemos por 12 ya se tomará en cuenta); una vez elegidos b y c nos quedarán 7 posibilidades para a (pues a debe ser un dígito distinto de 0, de b y de c); así en este subcaso hay $(3)(7) = 21$ posibilidades. Análogamente, si b y c son 2 y 8 (en cualquier orden), a tiene 7 posibilidades. Entonces el total en este caso son $12(21 + 7) = 336$.
- Números con dos cifras repetidas cada una: forma básica $aabb$ con $a \neq b$, considerando las distintas posiciones para a y b. En este caso la posición de a (que se puede escoger de $\binom{4}{2} = 6$ formas) determina la de b. La elección de a y b (dos dígitos distintos cualesquiera) puede hacerse de $\binom{9}{2} = 36$ formas (el papel de a y el de b es indistinguible en esta elección, pero una vez elegidos, al fijar cualquiera de ellos se determinan sus posiciones). En este caso tenemos entonces $(6)(36) = 216$ posibilidades.
- Números $abcd$ con a, b, c y d todos diferentes. Podemos pensar que vamos a permitir todas las elecciones de a, b, c y d (hay $4! = 24$ permutaciones) y considerar la elección de estos sin repetir colecciones. En ese caso no pueden ser todos cuadrados. Si $a = 2$ u 8, $b = 3$, $c = 6$ y d un cuadrado, entonces hay 6 posibilidades. Si $a = 2$, $b = 8$ y c y d son cuadrados, entonces

hay 3 posibilidades. En total hay $24(3+6) = 216$ posibilidades.

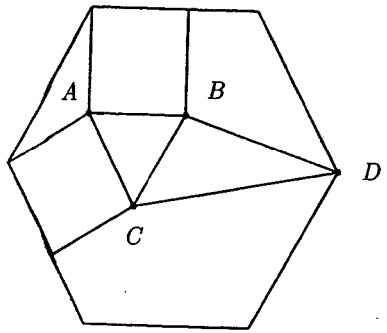
Sumando todos los resultados parciales tenemos que el resultado final es 3248.

Problema 22 (Problema D del Examen Estatal de la 20a OMM Veracruz de 2006) En el hexágono regular de la figura cada lado mide $\sqrt{3}$ y se dibujaron dos cuadrados sobre los lados, como se muestra en la figura.

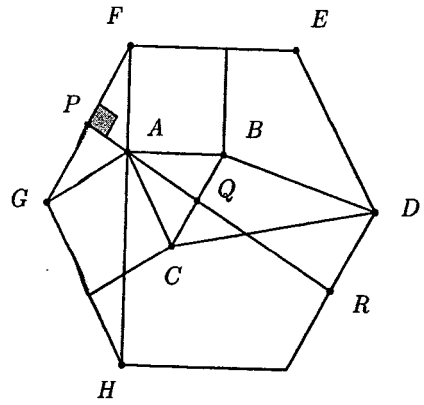
(a) Prueba que el triángulo $\triangle ABC$ es equilátero.

(b) Encuentra la medida de los lados de los cuadrados.

(c) Prueba que el área del triángulo $\triangle BCD$ es $\frac{5-\sqrt{3}}{4}$.



Solución Sean los puntos E, F, G y H como en la figura.



(a) Tenemos que $\angle EFG = 120°$ por ser ángulo interior de un hexágono regular. Como

$$\angle EFG = 90° + \angle AFG,$$

entonces $\angle AFG = 30°$. De la misma forma se puede probar que $\angle FGA = 30°$, por lo que $\triangle FAG$ es isósceles con $FA = GA$. De esto se desprende que $\triangle ABC$ es también isósceles con $AB = AC$. Como $\angle FAG = 120°$ y

$$\angle FAG + \angle GAC + \angle CAB + \angle BAF = 360°,$$

tenemos que $\angle CAB = 60°$. Por lo tanto $\triangle ABC$ es equilátero.

(b) Sea P el pie de A en FG. Por ser triángulo isósceles, la altura de $\triangle FAG$ también es bisectriz y mediatriz. Luego $\angle FAP = 60°$ y en consecuencia $FP = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $AP = \frac{1}{2}$ y $AF = 1$, ésta última es la medida de los lados de los cuadrados.

(c) Primero calculamos la medida del segmento FH, que es la medida entre los lados paralelos del hexágono. Por el inciso anterior sabemos que $AF = 1$, sólo resta conocer la medida de AH. Por Teorema el de Pitágoras aplicado a $\triangle AGH$ tenemos que $AH^2 = AG^2 + GH^2$, de donde $AH = 2$ y por lo tanto

$$FH = AF + AH = 3.$$

Como las alturas de los triángulos $\triangle AFG$ y $\triangle ABC$ son $\frac{1}{2}$ y $\frac{\sqrt{3}}{2}$ respectivamente, entonces la altura de $\triangle BCD$ es

$$QR = FH - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5-\sqrt{3}}{2}.$$

Finalmente

$$(\triangle BCD) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5-\sqrt{3}}{2} = \frac{5-\sqrt{3}}{4}.$$

Problema 23 (a) Sea F una familia de rectas en el plano que cumpla que cada tres elementos de la familia F tiene un punto en común. Prueba que todas las rectas en la familia F tienen un punto en común.

(b) Sea G una familia de puntos en el plano que cumpla que cada tres elementos de la familia G son colineales. Prueba que todos los puntos de la familia G son colineales.

(c) Sean F_1, F_2 y F_3 tres familias de rectas en el plano tales que cada tres rectas, cada una de diferente familia, tienen un punto en común. Prueba que todas las rectas de alguna de las familias F_1, F_2 y F_3 tienen un punto en común.

Solución (a) Si la familia F consta de a lo más 3 rectas, entonces la conclusión se cumple fácilmente. Vamos a suponer que la familia tiene más de 3 rectas diferentes. Sean l_1, l_2 y l_3 tres elementos diferentes de la familia F, estas rectas, por hipótesis, tienen un punto en común, llamémosle x_0. Ahora sea l otro elemento cualquiera de F. Probaremos que l también pasa por x_0. Si consideramos las rectas l_1, l_2 y l, tenemos que deben tener un

punto en común, y como l_1 y l_2 ya pasan por x_0, entonces l también pasa necesariamente por x_0. De este modo, todos las rectas de la familia F pasan por x_0.

(b) El argumento de la prueba es el mismo que del problema anterior: tomamos x_1, x_2 y x_3 tres puntos diferentes en G, estos son colineales, digamos que pertenecen a la recta l_0. Ahora, si tomamos un cuarto punto, éste debe pertenecer también a l_0.

(c) Tomemos tres rectas diferentes l_1, l_2 y l_3 que pertenecen a F_1, F_2 y F_3, respectivamente; notemos que si no es posible hallar estas rectas, entonces al menos habrán dos familias que sean iguales y contienen a una sola recta, y la conclusión es cierta. Ahora, por hipótesis, l_1, l_2 y l_3 son concurrentes, digamos que pasan por x_0. Tomemos cualquier otra recta l de cualquier familia, digamos que pertenece a F_1. Entonces si tomamos en cuenta a la terna de rectas l, l_2 y l_3, estos deben ser concurrentes, y como l_2 y l_3 pasan por x_0, l pasa necesariamente por x_0. Si la recta pertenece a F_2 o a F_3, la prueba es similar. Por lo tanto, todas las rectas de cualquier familia pasan por un mismo punto.

Problema 24 Encuentra el máximo común divisor entre $11\cdots1$ (2001 dígitos) y $11\cdots1$ (667 dígitos).

Solución 1 Como tenemos las siguientes igualdades

$$\underbrace{11\ldots1}_{667} = \frac{10^{667}-1}{9},$$

$$\underbrace{11\ldots1}_{2001} = \frac{10^{2001}-1}{9}$$

y $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$, entonces

$$\frac{\frac{10^{2001}-1}{9}}{\frac{10^{667}-1}{9}} = \frac{9(10^{2001}-1)}{9(10^{667}-1)} = \frac{10^{3(667)}-1}{10^{667}-1} = 10^{2(667)}+10^{667}+1.$$

En otras palabras, $\underbrace{11\ldots1}_{667}$ divide a $\underbrace{11\ldots1}_{2001}$, por lo que el máximo común divisor es $\underbrace{11\ldots1}_{667}$.

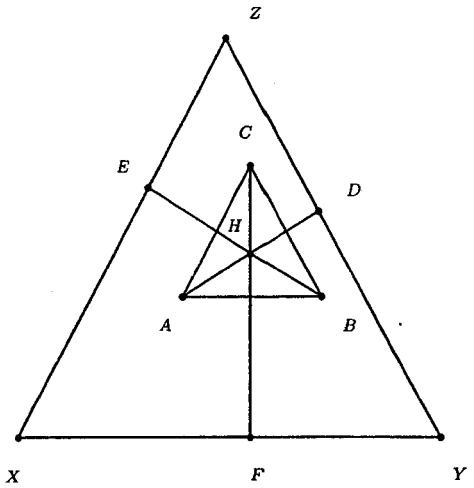
Solución 2 Notemos que

$$\underbrace{11\ldots1}_{2001} = (\underbrace{11\ldots1}_{667})(1\underbrace{00\ldots0}_{666}1\underbrace{00\ldots0}_{666}1),$$

por lo que $\underbrace{11\ldots1}_{667}$ divide a $\underbrace{11\ldots1}_{2001}$, entonces el máximo común divisor es $\underbrace{11\ldots1}_{667}$.

Problema 25 (Problema D del Examen Estatal de la 19a OMM Veracruz de 2005)

En el triángulo equilátero $\triangle ABC$ cada lado mide 2. Las alturas del triángulo se intersecan en el punto H y la distancia de H a cada lado es k. Se construye un triángulo $\triangle XYZ$ que tiene lados paralelos a $\triangle ABC$ y las rectas AH, BH y CH cortan a los lados de $\triangle XYZ$ en D, E y F, respectivamente. Si $HD=2k$, $HE=3k$ y $HF=4k$, ¿cuánto mide el lado del triángulo $\triangle XYZ$?



Solución 1 Como $\triangle ABC$ es equilátero, entonces las alturas también toman el papel de medianas y éstas se cortan a un tercio de su longitud, por esto, la altura de $\triangle ABC$ es $3k$. Luego, observemos que

$$(\triangle ABC) = \frac{2(3k)}{2} = 3k,$$

$$(\triangle XYZ) = \frac{XY(HF)}{2} + \frac{YZ(HD)}{2} + \frac{XZ(HE)}{2}.$$

Pero como AB, BC y AC son paralelos a XY, YZ y XZ, respectivamente, entonces $\triangle XYZ$ también es equilátero. Llamaremos al lado de éste m. Entonces,

$$(\triangle XYZ) = \frac{4km}{2} + \frac{2km}{2} + \frac{3km}{2} = \frac{mk}{2}(4+2+3) = \frac{9km}{2}.$$

Los cuadriláteros $(ABYX)$, $(BCZY)$ y $(ACZX)$ tienen paralelos dos de sus lados y sus alturas son $4k-k$, $2k-k$ y $3k-k$, respecti-

vamente. Así tenemos

$$\begin{aligned}(ABYX) &= \frac{3k(m+2)}{2},\\ (BCZY) &= \frac{k(m+2)}{2},\\ (ACZX) &= \frac{2k(m+2)}{2}.\end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de cada una de las áreas obtenidas en la relación

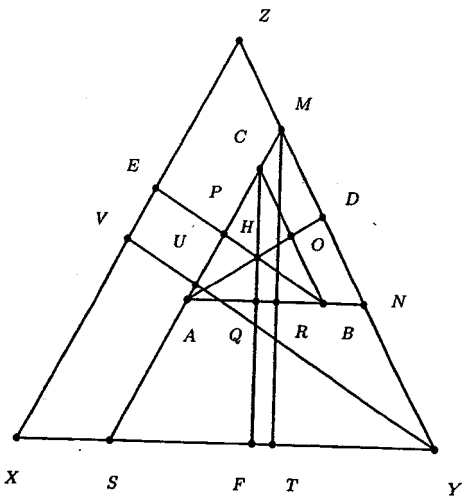
$$(\triangle XYZ) = (\triangle ABC) + (ABYX) + (BCZY) + (ACZX),$$

obtenemos la ecuación

$$\frac{9km}{2} = 3k + \frac{3k(m+2)}{2} + \frac{k(m+2)}{2} + \frac{2k(m+2)}{2},$$

la cual es equivalente a $3m = 2+2(m+2)$, cuya solución es $m = 6$.

Solución 2 Llamemos O, P y Q a las intersecciones de AD con CB, BE con AC y CF con AB, respectivamente. Como Q es el pie de C en AB, también es punto medio. Luego, por el Teorema de Pitágoras, tenemos que $CQ = \sqrt{3}$. Además, $\triangle ABC$ es equilátero y sus alturas también cumplen con la función de medianas, por lo que se cortan a un tercio de su longitud y así tenemos que $k = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$



Sean M y N las intersecciones de AC y AB con YZ, respectivamente. El triángulo $\triangle AMN$ es semejante a $\triangle ABC$, por lo que AD es su altura. Como $\triangle AMN$ es equilátero, tenemos que $AD = MR = 2k + 2k = 4k$, donde R es el pie de M en AN.

Sean S y T las intersecciones de AC y MR con XY, respectivamente. El triángulo $\triangle MSY$ es semejante a $\triangle AMN$, por lo tanto es equilátero. Además MT es su altura y $MT = MR+QF = 4k+3k = 7k$. Llamemos ahora U al pie de Y en MS, y V a la intersección de UY con XZ. Sabemos que $\triangle XYZ$ es equilátero, por lo que $MT = UY$. Además $VY = UY + PE = 7k + 2k = 9k$, es decir la altura de $\triangle XYZ$ mide $3\sqrt{3}$.

Finalmente tenemos la siguiente relación de semejanza con los triángulos $\triangle CQB$ y $\triangle ZFY$,

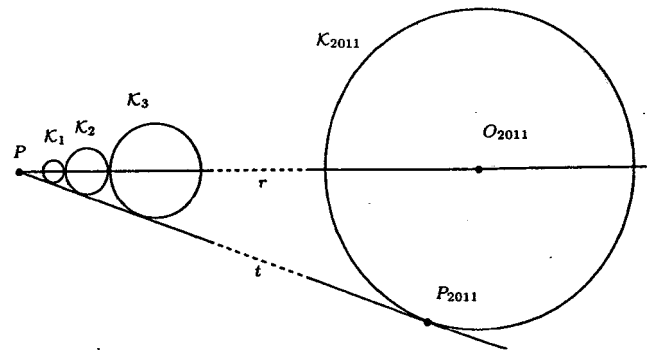
$$\begin{aligned}\frac{CQ}{CB} &= \frac{ZF}{ZY},\\ \frac{\sqrt{3}}{2} &= \frac{3\sqrt{3}}{ZY}.\end{aligned}$$

Por lo que $ZY = 6$.

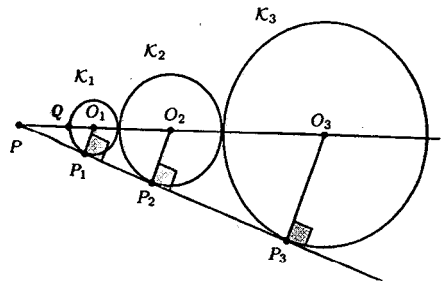
Problema 26 (Problema E del Examen Estatal de la 25a OMM Veracruz de 2011)

La siguiente figura muestra algunas de 2011 circunferencias $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$, $\mathcal{K}_3$, ..., $\mathcal{K}_{2011}$ que tienen sus centros sobre la recta r, son todas tangentes a la recta t y cada circunferencia es tangente a la circunferencia anterior; además los radios de las dos primeras circunferencias $\mathcal{K}_1$ y $\mathcal{K}_2$ miden respectivamente 1 y 2.

Si P es el punto de intersección de r con t, O_{2011} es el centro de $\mathcal{K}_{2011}$ y P_{2011} es el punto de tangencia de $\mathcal{K}_{2011}$ con t, encuentra el área del triángulo determinado por los puntos P, O_{2011} y P_{2011}.



Solución Sea Q el punto de intersección de la circunferencia $\mathcal{K}_1$ con la recta r como en la figura y hagamos $x = PQ$. Sean O_1, O_2 y O_3 los centros de las circunferencias $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ y $\mathcal{K}_3$ respectivamente; y sean P_1, P_2 y P_3 los puntos de tangencia de las circunferencias $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ y $\mathcal{K}_3$ con la recta t respectivamente.



Tenemos que P_1O_1, P_2O_2 y P_3O_3 son todos perpendiculares a t; luego, utilizando el criterio AA, se sigue que los triángulos $\triangle PP_1O_1$, $\triangle PP_2O_2$ y $\triangle PP_3O_3$ son semejantes entre sí.

Considerando que $\triangle PP_1O_1$ y $\triangle PP_2O_2$ son semejantes y que las circunferencias $\mathcal{K}_1$ y $\mathcal{K}_2$ tienen radios iguales a 1 y 2 respectivamente, entonces

$$\frac{x+1}{x+4}=\frac{1}{2};$$

por lo que $x=2$ y en consecuencia $PO_1=3$. Si y es el radio de la circunferencia $\mathcal{K}_3$ entonces, considerando que $\triangle PP_1O_1$ y $\triangle PP_3O_3$ son semejantes,

$$\frac{3}{8+y}=\frac{1}{y};$$

de donde $y=4=2^2$. Análogamente, si z es el radio de la circunferencia $\mathcal{K}_4$ entonces

$$\frac{3}{16+z}=\frac{1}{z};$$

de donde $z=8=2^3$. En general se puede ver que el radio de la circunferencia $\mathcal{K}_n$ es igual a 2^{n-1}, por lo que el radio de de la circunferencia $\mathcal{K}_{2011}$ es igual a 2^{2010}.

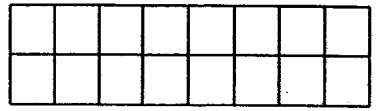
Por el Teorema de Pitágoras aplicado a $\triangle PP_1O_1$, tenemos que $PP_1=\sqrt{9-1}=2\sqrt{2}$. Como $\triangle PP_1O_1$ y $\triangle PP_{2011}O_{1011}$ son semejantes, entonces

$$\frac{PP_{2011}}{PP_1}=\frac{P_{2011}O_{1011}}{P_1O_1}.$$

Por lo tanto $PP_{2011}=(2\sqrt{2})(2^{2010})$. Finalmente el área del triángulo determinado por los puntos P, O_{2011} y P_{2011} es

$$\frac{(PP_{2011})(O_{2011}P_{2011})}{2}=\frac{(2\sqrt{2})(2^{2010})(2^{2010})}{2}=2^{4020}\sqrt{2}.$$

Problema 27 (Problema A del Examen Estatal de la 21a OMM Veracruz de 2007) En la siguiente cuadrícula, se puede colocar un 1 o un -1 en cada casilla. ¿De cuántas maneras diferentes se puede llenar la cuadrícula si se requiere que la suma de los números en cada fila y en cada columna sea cero?



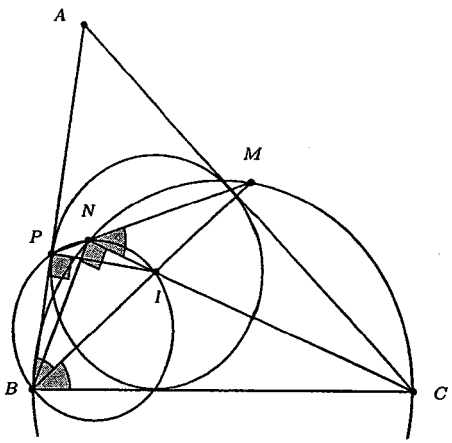
Solución Observemos que para obtener cero en una fila, forzosamente se deben colocar cuatro 1 y cuatro -1 y una vez colocados estos en una fila, sólo basta rellenar cada columna con el uno de signo contrario para obtener cero también en la columna.

Entonces nuestro problema sólo se reduce a distribuir cuatro 1 o -1 en ocho casillas. Por lo tanto, las maneras posibles de rellenar la cuadrícula son

$$\binom{8}{4}=\frac{8!}{4!(8-4)!}=\frac{8!}{4!4!}=70.$$

Problema 28 Sea $\triangle ABC$ un triángulo acutángulo. Una circunferencia S que pasa por B y C corta a las bisectrices de $\angle ABC$ y $\angle ACB$ en los puntos M y N, respectivamente. Sea P el punto en donde la recta MN corta a AB. Demuestra que si la circunferencia inscrita al triángulo $\triangle ABC$ es tangente a AB en P, entonces BC es diámetro de S.

Solución Sea I el incentro de $\triangle ABC$, intersección de las bisectrices BM con CN.



Por ser $BCMN$ un cuadrilátero cíclico, entonces $\angle CBM=\angle CNM$. Además al ser BM bisectriz de $\angle ABC$, tenemos que $\angle ABM=\angle CBM$. De esta manera se cumple que

$$\angle PBI=\angle ABM=\angle CBM=\angle CNM=\angle INM.$$

Y como $\angle PNI+\angle INM=180°$, entonces $\angle PNI+\angle PBI=180°$, de donde $BINP$ es cíclico.

Ahora, como I es el incentro de $\triangle ABC$ y el incírculo es tangente a AB en P, entonces PI es perpendicular a AB. Y como $\angle BNI = \angle BPI = 90°$, por ser ángulos inscritos en la circunferencia circunscrita al cuadrilátero $BINP$, entonces

$$\angle BNC = \angle BNI = 90°,$$

lo cual implica que BC es diámetro de S.

Problema 29 Determina todos los posibles resultados que se obtienen al sumar 90 enteros distintos tomados del 1 al 100.

Solución 1 La menor suma se obtiene considerando los primeros 90 enteros

$$S_m = 1+2+\cdots+90 = \frac{(90)(91)}{2} = 45(91),$$

mientras que la mayor suma se obtiene sumando los últimos 90 enteros

$$S_M = 11+12+\cdots+100 = \frac{(90)(111)}{2} = 45(111).$$

Demostraremos que todo número entero entre S_m y S_M se puede escribir como suma de 90 números distintos tomados del 1 al 100. Sean

$$\begin{aligned} S_k &= k+(k+1)+\cdots+(k+89), \\ R_k &= (k+1)+(k+2)+\cdots+(k+90); \end{aligned}$$

con $1 \leq k \leq 10$. Como $S_k = 90k+45(89)$ y $R_k = 90k+45(91) = S_k+90$, entonces si n es un entero tal que $S_k < n < R_k$, necesariamente n es de la forma S_k+r con $1 \leq r < 90$. Luego, para escribir a n como suma de 90 enteros distintos tomados del 1 al 100, basta sumarle 1 a cada uno de los r sumandos más grandes de S_k. Por lo tanto, los valores posibles para la suma de 90 enteros distintos tomados del 1 al 100, son todos los enteros n tales que $45(91) \leq n \leq 45(111)$.

Solución 2 Sean

$$\begin{aligned} S_m &= 1+2+\cdots+90 = \frac{(90)(91)}{2} = 45(91), \\ S_M &= 11+12+\cdots+100 = \frac{(90)(111)}{2} = 45(111), \end{aligned}$$

la sumas menor y mayor respectivamente, que se obtienen al sumar 90 enteros distintos tomados del 1 al 100. Supongamos que $b > S_m$ no puede ser obtenido como la suma de una elección de 90 enteros distintos tomados del 1 al 100, mientras que $b-1$ sí puede ser obtenido como una de tales sumas. Sean $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_{90} \leq 100$ tales que

$$b-1 = a_1+a_2+\cdots+a_{90}.$$

Tenemos entonces que $a_{90} = 100$, pues de otro modo sustituyendo a_{90} por $a_{90}+1$ obtendríamos b, lo cual no es posible. Por el mismo argumento, tenemos que $a_{t-1} = a_t - 1$ para $2 \leq t \leq 90$. Luego,

$$b = S_M + 1 > S_M,$$

lo que prueba que todo entero entre S_m y S_M (incluyéndolos), podemos escribirlo como una suma de 90 enteros distintos tomados del 1 al 100.

Problema 30 Encuentra todos los números enteros positivos b y k que son solución de la ecuación

$$b^2+1 = k(b-1).$$

Solución Como $b^2+1 = k(b-1)$, entonces tenemos la siguiente cadena de congruencias.

$$\begin{aligned} b^2+1 &\equiv 0 \pmod{b-1} \\ (b^2-1)+2 &\equiv 0 \pmod{b-1} \\ 2 &\equiv 0 \pmod{b-1} \end{aligned}$$

lo cual significa que $b-1$ divide a 2. Así que los únicos casos posibles es que $b-1 = 1$ o bien $b-1 = 2$. Por lo tanto, las soluciones posibles son $b = 2, k = 5$ y $b = 3, k = 5$.

Problema 31 En una cárcel diez reos están condenados a muerte y se les va a dar una última oportunidad para salvarse.

Se pondrán los diez en una fila y a cada uno se le pondrá un sombrero, ya sea blanco o negro. Cada reo sólo podrá ver el color de los sombreros de sus compañeros de adelante (no podrá ver el suyo ni ninguno de los de atrás). Se les irá preguntando, a uno por uno, empezando por el último de la fila y en orden hasta terminar con el primero: "¿cuál es el color de su sombrero?"

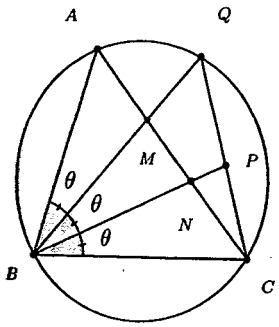
Si un reo le atina a su color salva su vida, en caso contrario lo matan. ¿Cómo le pueden hacer los reos para que se salven al menos nueve de ellos?

Solución El reo número 10, que es el primero en hablar, ve 9 sombreros de dos colores posibles. De un color debe haber un número par y del otro uno impar. Los reos se pueden poner de acuerdo para que el reo número 10 diga el color del que ve un número par, de esta forma el reo número 9 sabrá de que color es su sombrero, ya que cuenta el número de sombreros que ve del color que dijo su compañero: si sigue siendo par, su sombrero es del otro color, y si es impar, su sombrero es de ese color.

Así cada uno de los siguientes reos cuenta el número de sombreros que ve del color que dijo el reo número 10 y a ese número le suma la cantidad de veces que sus otros compañeros han dicho el color, si el número que le da es par, entonces su sombrero es del otro color y si es impar, su sombrero es de ese color. De esta forma el único que quizá no se salva es el reo número 10.

Problema 32 Considera la siguiente figura, en donde $\angle ABQ = \angle QBP = \angle PBC = \theta$. Demuestra que

$$\frac{AM}{AN} + \frac{CP}{CQ} = 1.$$



Solución Observemos que como abrazan la misma cuerda, $\angle BAC = \angle BQC$. Además como N y M son colineales con A y C, entonces $\angle BAN = \angle BAM = \angle BAC$. Y como P está en el segmento QC entonces

$$\angle BQP = \angle BQC.$$

De esta manera se cumple que $\angle BAN = \angle BQC$ y $\angle ABN = 2\theta = \angle QBC$, luego por el criterio AA los triángulos $\triangle ABN$ y $\triangle QBC$ son semejantes.

De forma análoga, como $\angle BAM = \angle BQP$ y $\angle ABM = \theta = \angle QBP$, por el criterio AA tenemos que los triángulos $\triangle BAM$ y $\triangle BQP$ también son semejantes.

A partir de estas semejanzas de triángulos tenemos que se cumplen las relaciones

$$\frac{AB}{QB} = \frac{AN}{QC},$$
$$\frac{AB}{QB} = \frac{AM}{QP}.$$

En consecuencia $\frac{AN}{QC} = \frac{AM}{QP}$ o equivalentemente

$$\frac{AM}{AN} = \frac{QP}{QC}.$$

Finalmente, sumando $\frac{PC}{QC}$ en ambos lados de la última expresión y usando el hecho de que $QC = QP + PC$ obtenemos

$$\frac{AM}{AN} + \frac{PC}{QC} = \frac{QP}{QC} + \frac{PC}{QC} = \frac{QP + PC}{QC} = 1.$$

Problema 33 (Problema 1 del Examen Nacional de la 22a OMM 2008)

Sean $1 = d_1 < d_2 < d_3 < \cdots < d_k = n$ los divisores del entero positivo n. Encuentra todos los números n tales que $n = d_2^2 + d_3^3$.

Solución Primero notemos que todo número par elevado a cualquier potencia, resulta ser un número par, y que todo número impar elevado a cualquier potencia, resulta impar. Vemos que d_2 vale al menos 2. Procedamos por casos.

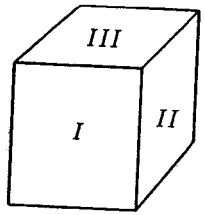
- Tanto d_2 como d_3 son impares. En este caso, $n = d_2^2 + d_3^3$ sería par, por lo que d_2, el primer divisor mayor que 1 tendría que ser 2, esto contradice a que d_2 es impar, por lo que este caso no es posible.
- d_2 es par y d_3 es impar. Aquí $n = d_2^2 + d_3^3$ sería un número impar, por lo que ningún divisor puede ser par, en particular, d_2 no sería impar. Este caso tampoco puede darse.
- d_2 es impar y d_3 es par. Si d_3 es par, entonces n debe ser par, y el primer divisor distinto de 1 tiene que ser 2, por lo que $d_2 = 2$. Este caso entonces tampoco puede darse.
- Tanto d_2 como d_3 son pares. En este caso, $n = d_2^2 + d_3^3$ es un número par, por lo que d_2 tiene que valer 2. Si d_3 fuera de la forma $d_3 = 2q$, donde q es impar, entonces q sería un divisor menor a d_3 y distinto de d_2, y eso no es posible. Así, d_3 debe ser de la forma $2p$ donde p es un número par, por lo que d_3 tiene què valer 4. Por lo tanto, el único número que cumple la condición es

$$n = 2^2 + 4^3 = 4 + 64 = 68.$$

Problema 34 Un número de cubos de lado uno se colocan juntos para formar un cubo más grande y algunas de las caras del cubo grande se pintan. Después de pintado se vuelven a separar los cubos y vemos que 45 cubos de lado uno no tienen ninguna de sus caras pintadas. ¿Cuántas caras del cubo grande se pintaron?

Solución 1 Observemos que, si las caras del cubo grande estuviesen formadas por 3 cubos unitarios (de lado uno), tendríamos un total de $3^3 = 27$ cubos unitarios por lo que resultaría imposible pintar algunas de las caras y obtener, al final, 45 cubos unitarios sin pintar. De esta manera, el primer cubo que puede ser analizado para dar solución al problema es aquel cuyas caras miden 4 cubos unitarios.

Numeremos las caras del cubo grande como si fuera un dado, en donde la cara opuesta a la número I es la cara VI, la opuesta a la cara II es la V y la opuesta a III es la cara IV.



Supongamos que tenemos un cubo de longitud 4 cubos unitarios. Si pintamos una de sus caras, digamos la cara I, habremos pintado 16 cubos pequeños; dado que el total de cubos pequeños es $4^3 = 64$ y $64 - 16 = 48$ debemos pintar alguna otra cara del cubo grande para conseguir 45 cubos pequeños no pintados. Las opciones que tenemos son pintar la cara opuesta a I o bien una de las caras adyacentes. Si pintamos la cara opuesta (cara VI), habremos pintado otros 16 cuadros pequeños y si pintamos una de las caras adyacentes, por ejemplo la cara II, tendremos 12 cuadros pequeños pintados (los 4 cubos que completarían la cara II forman parte también de la cara I). Claramente, en ninguno de los dos casos es posible obtener 45 cubos unitarios no pintados.

Analicemos ahora un cubo de longitud 5 cubos unitarios. Entonces, el total de cubos unitarios será $5^3 = 125$ por lo que, si queremos que 45 de ellos queden sin ser pintados, deberemos pintar un total de 80. Empecemos pintando la cara I, es decir 25 cubos unitarios, si pintamos ahora la cara VI habremos pintado otros 25 cubos pequeños, las opciones para seguir pintando son las caras adyacentes a las ya pintadas, es decir, alguna de las caras II, III, IV o V; sin importar cuál elijamos, estaríamos pintando 15 cuadros unitarios (los 10 cubos que completan una de estas caras pertenecen también a las caras I o VI). Supongamos que en éste paso hemos elegido la cara II así, llevamos pintados $25 + 25 + 15 = 65$ cubos unitarios y por tanto, para garantizar el pintado de los últimos 15 cubos unitarios elegimos la cara opuesta a II (cara V) pues de lo contrario obtendríamos sólamente 12 cubos unitarios más.

Por tanto, se pintaron 4 caras de un cubo de longitud 5 cubos unitarios.

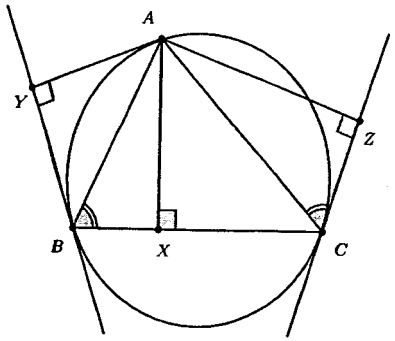
Solución 2 Observemos que si tenemos un cubo formado por $6 \times 6 \times 6$ cubitos, el cubo que está en la parte interior del cubo mayor es un cubo de $4 \times 4 \times 4 = 64$ cubitos que no estarán pintados y el problema nos dice que únicamente 45 cubos pequeños no tienen caras pintadas. Por lo tanto, nuestro cubo grande estará formado por a lo más $5 \times 5 \times 5$ cubitos. Veamos qué sucede para el caso del cubo formado por $4 \times 4 \times 4$ cubitos. Ocultos a la vista tenemos un cubo formado por $2 \times 2 \times 2 = 8$ cubitos que no se pintan aun cuando pintemos todas las caras del cubo mayor. Luego, tenemos que ver cuántas caras del cubo mayor hay que pintar para tener otros 37 cubitos sin pintar.

Si únicamente pintamos una cara del cubo de $4 \times 4 \times 4$, tendremos $3 \times 4 \times 4 = 48$ cubitos sin caras pintadas. Luego, tendremos que pintar al menos dos caras del cubo de $4 \times 4 \times 4$, pero esto lo podemos hacer de dos formas, es decir: pintar dos caras que comparten una arista o pintar dos caras que no tienen una arista en común. Analicemos cada caso. Supongamos que tenemos dos caras pintadas que comparten una arista. Entonces, tendremos $3 \times 3 \times 4 = 36$ cubitos sin pintar y necesitamos tener 45. Ahora analicemos el caso donde tenemos dos caras pintadas que no comparten una arista. En este caso tenemos $2 \times 4 \times 4 = 32$ cubitos sin pintar. Por lo tanto, no hay posibilidad de obtener 45 cubitos sin pintar para un cubo de $4 \times 4 \times 4$, ya que si pintamos más caras el número de cubitos sin pintar será menor. Para los cubos formados por un número menor de cubitos tampoco hay solución, ya que tienen mucho menos de 45 cubitos. En el caso en que el cubo grande esté formado por $5 \times 5 \times 5$ cubitos, siempre habrá $3 \times 3 \times 3 = 27$ cubitos pequeños que no tienen caras pintadas y que forman la parte interior del cubo grande. Veamos qué debemos pintar para obtener 18 cubitos más sin pintar. Al igual que en el caso del cubo de $4 \times 4 \times 4$ cubitos, tenemos varios casos. Pensemos en el cubo de $5 \times 5 \times 5$ como una caja con 4 paredes, la base y la tapa. Si pintamos 4 caras, podemos hacerlo de 4 formas: pintar 3 paredes y la tapa; pintar 2 paredes que compartan una arista, la base y la tapa; pintar dos paredes que no compartan una arista, la base y la tapa; o pintar 4 paredes sin pintar la base y la tapa. Los primeros dos casos son equivalentes, y tenemos $(3 \times 4) + (3 \times 3) = 21$ cubitos sin pintar, pero sólo necesitamos 18. Los otros dos casos son equivalentes y se obtienen $3 \times 3 \times 2 = 18$ cubitos sin pintar y por lo tanto habrá $27 + 18 = 45$ cubitos que no tienen caras pintadas. Por lo tanto, se pintaron 4 caras del cubo grande (que es un cubo de $5 \times 5 \times 5$ cubitos).

Problema 35 Sean $\triangle ABC$ un triángulo acutángulo y X el pie de A en BC. Sean Y y Z los pies de A en las tangentes al circuncírculo de $\triangle ABC$ que pasan por B y C respectivamente. Si $AY = 2$ y $AZ = 5$, encuentra el valor de AX. Además demuestra que los triángulos $\triangle AXY$ y $\triangle AZX$ son semejantes.

Solución Por ser ángulos inscritos y semi-inscritos que abrazan a un mismo arco, $\angle ABC = \angle ACZ$. Como además $\angle AXB = 90° = \angle AZC$, por el criterio AA tenemos que $\triangle ABX$ y $\triangle ACZ$ son semejantes, de donde

$$\frac{AX}{AZ} = \frac{AB}{AC}.$$



Análogamente podemos ver que $\triangle AYB$ y $\triangle AXC$ son semejantes, de donde

$$\frac{AY}{AX} = \frac{AB}{AC}.$$

Por lo tanto tenemos que

$$\frac{AX}{AZ} = \frac{AB}{AC} = \frac{AY}{AX},$$

se sigue que $AX^2 = AY \cdot AZ$. Sustituyendo los valores $AY = 2$ y $AZ = 5$, tenemos que $AX = \sqrt{10}$.

Además, como $\triangle ABX \sim \triangle ACZ$ y $\triangle AYB \sim \triangle AXC$, entonces

$$\begin{aligned} \measuredangle YAX &= \measuredangle YAB + \measuredangle BAX \\ &= \measuredangle XAC + \measuredangle CAZ \\ &= \measuredangle XAZ. \end{aligned}$$

Considerando la relación de proporcionalidad encontrada anteriormente, por el criterio LAL concluimos que los triángulos $\triangle AXY$ y $\triangle AZX$ son semejantes.

Problema 36 Un hombre del desierto dejó dicho en su testamento que sus tres hijos debían recibir la n-ésima, la m-ésima y la t-ésima parte de su rebaño de camellos, respectivamente. El hombre tenía N camellos, con $N \geq 3$, en el rebaño cuando murió, en donde $N+1$ es múltiplo común de m, n y t. Como los tres hijos no pudieron dividir N exactamente en m, n, y t partes, mandaron llamar a Pablo para que les ayudara a resolver el problema. Pablo llegó con su propio camello, el cual se sumó al rebaño. Entonces el rebaño fue dividido de acuerdo a los deseos del hombre. Pablo tomó su camello de vuelta, el cual sobró después de la repartición. Determina todas las soluciones posibles (m, n, t, N).

Solución Estamos buscando un entero $N \geq 3$ y enteros positivos n, m y t cada uno de los cuales divida a $N+1$ y que

$$\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{t}\right)(N+1) = N$$

o de manera equivalente

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{t} = \frac{N}{N+1}.$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $5 \leq n \leq m \leq t$. Entonces

$$\frac{1}{t} \leq \frac{1}{m} \leq \frac{1}{m} \leq \frac{1}{5},$$

de donde

$$\frac{N}{N+1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{t} \leq \frac{3}{5}.$$

Es decir, $N \leq \frac{3}{2}$, lo que contradice que $N \geq 3$. Por lo tanto, $2 \leq n \leq 4$ (si $n = 1$, entonces n dividiría a N y a $N+1$). Dividimos en casos.

Caso 1. Si $n = 4$, entonces

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{t} = \frac{3N-1}{4N+4}.$$

Si $m \geq 5$, entonces

$$\frac{1}{t} \leq \frac{1}{m} \leq \frac{1}{5}$$

y en consecuencia

$$\frac{3N-1}{4N+4} \leq \frac{2}{5},$$

de modo que $N \leq \frac{13}{7} < 2$ lo cual no es posible. Por lo tanto, $m = 4$ ya que $m \geq n$. Entonces,

$$t = \frac{2N+2}{N-1} = 2 + \frac{4}{N-1}$$

de donde $N-1$ debe dividir a 4. Es fácil ver que las únicas posibilidades son $N = 5$ y $N = 3$. Si $N = 5$, entonces $t = 3 < 4 = m$ que es una contradicción. Por lo tanto, $N = 3$, $t = 4$ y la única solución para (n, m, t, N) en este caso es

$$(4, 4, 4, 3),$$

es decir, cada uno recibe un camello.

Caso 2. Si $n = 3$, entonces un argumento similar al caso anterior muestra que $m = 4$ o $m = 3$. Si $m = 4$, entonces

$$t = \frac{12N+12}{5N-7}$$

de donde $5N-7$ debe dividir a $12N+12$. Luego, $5N-7$ debe dividir a

$$5(12N+12) - 12(5N-7) = 144.$$

Como $N+1$ es múltiplo de 3 y 4, entonces $N \geq 11$. Es fácil ver que la única posibilidad es $5N-7=48$, de modo que $N=11$ y $t=3$. Esto contradice nuevamente que $m \leq t$. De manera análoga, si $m=3$ entonces $N=5$ o $N=11$, de donde (n,m,t,N) es

$$(3,3,6,5) \text{ o bien } (3,3,4,11),$$

respectivamente.

Caso 3. Si $n=2$, de manera similar a los casos anteriores encontramos que $m=6,5,4$ o 3, lo que nos da 9 soluciones más para (n,m,t,N), a saber

$$(2,6,6,5),(2,4,8,7),(2,5,5,9),$$

$$(2,3,12,11),(2,4,6,11),(2,3,9,17),$$

$$(2,4,5,19),(2,3,8,23),(2,3,7,41).$$

Problema 37 A cada vértice de un cubo se le asigna el valor de $+1$ ó -1, y a cada cara el producto de los valores asignados a sus vértices. ¿Qué valores puede tomar la suma de los 14 números así obtenidos?

Solución Si un vértice tiene un número a, entonces ese número aparece como factor en 3 caras, así que si hacemos el producto de los valores de los 8 vértices y el de las 6 caras, tenemos que el número a aparece elevado a la cuarta potencia, y todo el producto vale 1. Esto nos dice que hay un número par de -1, digamos I, y un número par de 1, digamos P.

Si S es la suma de los 14 números, entonces tenemos que $P+I=14$ y $P-I=S$, y obtenemos $S=2P-14$, donde P es un número par. Entonces, los posibles valores de S son

$$-14,-10,-6,-2,2,6,10 \text{ y } 14.$$

El -14 no se logra, pues no se da que todos los números puedan ser -1. El 10 tampoco es posible, porque deben haber 12 números positivos y 2 negativos y esto no es posible. Si un vértice es negativo, $S=6$ y si sólo hay un vértice positivo, $S=-6$. Si dos vértices son negativos, S puede tomar los valores de $-2, 2$ ó 6, y finalmente, si dos vértices son positivos, $S=-10$ ó $S=-6$. Así, los posibles valores son

$$-10,-6,-2,2,6 \text{ y } 14.$$

Problema 38 Hay $2n+1$ duendes. Al principio cada duende tiene n amigos entre los demás duendes. Cada día cada duende se convierte en amigo de los amigos de sus amigos. Prueba que debe llegar el día en que todos sean amigos entre sí.

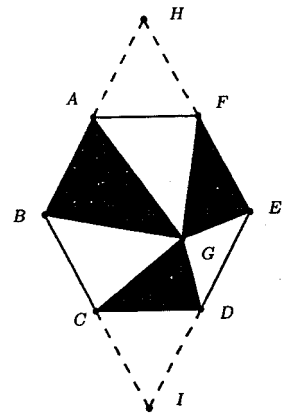
Solución Consideremos la gráfica de amistades, es decir, pongamos un punto por cada duende y una línea uniendo a dos puntos si los duendes correspondientes son amigos.

Es claro que basta fijarse en un duende cualquiera y probar que llega un momento en que él es amigo de todos los demás. Para ésto también es claro que basta ver que hay un camino formado por las líneas de la gráfica que une a ese duende con todos los demás (es decir, que la gráfica es conexa).

Como al principio cada duende es amigo de n duendes, con ellos ya está conectado, de manera que un bloque conexo de la gráfica tiene por lo menos $n+1$ elementos. Si hubiera un duende no conectado con este bloque, él mismo pertenecería a un bloque de $n+1$ duendes separado del primero. Pero sólo hay $2n+1$ duendes, así que esto no es posible.

Problema 39 Dentro de un hexágono $ABCDEF$ se coloca un punto arbitrario G y se trazan segmentos desde éste a cada uno de los vértices del hexágono, formando seis triángulos $\triangle ABG$, $\triangle BCG$, $\triangle CDG$, $\triangle DEG$, $\triangle EFG$ y $\triangle AFG$, los cuales se colorean en forma alternada de blanco y negro. Demuestra que el área de color blanco es igual al área de color negro.

Solución Consideremos el hexágono $ABCDEF$ coloreado como indica el problema. Sobre los lados AF y CD construimos triángulos equiláteros $\triangle AFH$ y $\triangle CID$ respectivamente, y trazamos los segmentos que unen a los puntos H e I con G, como en la figura.



En el triángulo $\triangle BGH$ tenemos que $(\triangle AHG)=(\triangle BAG)$ por tener la misma base y la misma altura. Análogamente, $(\triangle CBG)=(\triangle CIG)$, $(\triangle DIG)=(\triangle EDG)$ y $(\triangle FEG)=(\triangle HFG)$. Luego

$$(AHFG)+(\triangle EDG)+(\triangle CBG)=(CGDI)+(\triangle BAG)+(\triangle FEG).$$

Si restamos de esta ecuación las áreas que no interesan (los triángulos equiláteros que construimos al principio), tenemos que

$$(AHFG)-(\triangle AFH)+(\triangle EDG)+(\triangle CBG)=$$
$$(CGDI)-(\triangle CID)+(\triangle BAG)+(\triangle FEG).$$

De donde

$$(\triangle AFG)+(\triangle EDG)+(\triangle CBG)= (\triangle DCG)+(\triangle BAG)+(\triangle FEG).$$

Problema 40 Encuentra todos los números formados por cuatro dígitos (todos distintos entre sí) que cumplen con la siguiente propiedad: Si sumas el número formado por sus dos primeros dígitos con el número formado por sus dos últimos dígitos, obtienes el número formado por sus dos dígitos centrales. Es decir, $\overline{abcd}$ es un número de cuatro dígitos que cumple la propiedad si $\overline{ab}+\overline{cd}=\overline{bc}$.

Solución Si $\overline{abcd}$ es un número que cumple la condición del problema, entonces tenemos que $10a+b+10c+d=10b+c$, o equivalentemente

$$10a+d=9(b-c).$$

Observemos que $10a+d$ es múltiplo de 9. De la igualdad obtenida se tiene que $a+d=9(b-c-a)$, por lo que también $a+d$ es múltiplo de 9.

Ahora, a no puede ser 0, pues el número $\overline{abcd}$ sería de 3 dígitos. Por otro lado, a tampoco puede tomar el valor de 9, pues por lo anterior, d tendría que valer 0 y por la primer igualdad, $b-c$ tendría que valer 10, lo cual no es posible. Así que el par (a,d) puede tomar los siguientes valores

$$(a,d)=(1,8),(2,7),(3,6),(4,5),(5,4),(6,3),(7,2),(8,1).$$

Tomemos el primer caso, cuando $(a,d)=(1,8)$. De la primer igualdad se tiene que $b-c=\dfrac{10a+d}{9}$, en este caso $b-c=2$ y tomando en cuenta que los dígitos son distintos, entonces el par (b,c) puede tomar los valores

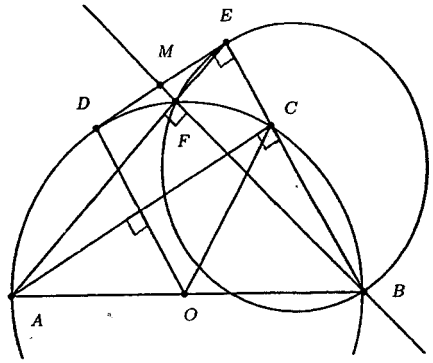
$$(b,c)=(2,0),(4,2),(5,3),(6,4),(7,5),(9,7).$$

Hacemos esto mismo para todos los casos de los pares (a,d), y obtenemos

$(a,d)=(1,8)$; $(b,c)=(2,0),(4,2),(5,3),(6,4),(7,5),(9,7)$.
$(a,d)=(2,7)$; $(b,c)=(3,0),(4,1),(6,3),(8,5),(9,6)$.
$(a,d)=(3,6)$; $(b,c)=(4,0),(5,1),(8,4),(9,5)$.
$(a,d)=(4,5)$; $(b,c)=(6,1),(7,2),(8,3)$.
$(a,d)=(5,4)$; $(b,c)=(6,0),(7,1),(8,2),(9,3)$.
$(a,d)=(6,3)$; $(b,c)=(7,0),(8,1),(9,2)$.
$(a,d)=(7,2)$; $(b,c)=(8,0),(9,1)$.
$(a,d)=(8,1)$; $(b,c)=(9,0)$.

Problema 41 Sea $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo con ángulo recto en $\angle C$. Sea D el punto medio del arco $\overset{\frown}{AC}$ en el circuncírculo de $\triangle ABC$. Sea E el pie de D en BC, F la intersección de AE con el circuncírculo y M la intersección de BF con DE. Demuestra que M es el punto medio de DE.

Solución Sea $\mathcal{C}_1$ el circuncírculo de $\triangle ABC$. Como $\angle ACB=90°$ entonces AB es el diámetro de $\mathcal{C}_1$. Si O el centro de $\mathcal{C}_1$, entonces $\triangle AOC$ es isósceles, de donde DO y AC son perpendiculares. Como además BC también perpendicular a AC, entonces DO y BC son paralelos; de donde DE es tangente a $\mathcal{C}_1$, ya que DE y OD son perpendiculares.



Sea $\mathcal{C}_2$ el circuncírculo de $\triangle BEF$. Como $\angle BFE=90°$, entonces DE es tangente a $\mathcal{C}_2$. De esta manera DE es la tangente común a $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$.

Como B y F son los puntos de intersección de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, entonces BF es el eje radical de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$. Y como el eje radical corta a la tangente común DE en M, entonces M es el punto medio de DE.

Problema 42 (Problema 3 del Examen Nacional de la 17a OMM 2003)
En una fiesta hay el mismo número n de muchachos que de muchachas. Supongamos que a cada muchacha le gustan a muchachos y que a cada muchacho le gustan b muchachas. ¿Cuáles son los valores de a y b para los cuales podemos asegurar que forzosamente hay un muchacho y una muchacha que se gustan mutuamente?

Solución Son los valores de a y b que cumplen $a+b>n$. Probemos primero que si $a+b>n$, entonces forzosamente hay un muchacho y una muchacha que se gustan mutuamente.

Primera forma. Supondremos que no hay dos que se gustan mutuamente y demostraremos que $a+b\leq n$. A cada quien le preguntamos quienes le gustan y hacemos la lista de parejas en las que alguno de los dos le gusta al otro. Como no hay dos que se gusten mutuamente, al hacer así la lista no obtenemos parejas repetidas. Por lo tanto obtenemos a lo más n^2 parejas en la lista. Por otra parte por cada muchacha obtenemos a parejas y por cada muchacho b,

de modo que obtenemos exactamente $an + bn = (a+b)n$ parejas. Entonces, $(a+b)n \leq n^2$ de donde $a+b \leq n$.

Segunda forma. El argumento utilizado es similar que el anterior. Numeramos los muchachos y las muchachas con los números de 1 al n, y hacemos una tabla de $n \times n$ en la que el cuadro en el renglón i y la columna j lo pintamos de rojo si a la muchacha i le gusta el muchacho j, de azul si la muchacha i le gusta al muchacho j y lo dejamos sin pintar en otro caso. Si no hay dos que se gusten mutuamente, ninguna casilla se pinta tanto de rojo como de azul. En cada renglón hay a casillas rojas y en cada columna hay b azules, de modo que en total hay $(a+b)n$ casillas pintadas. Por lo tanto, $(a+b)n \leq n^2$, es decir $a+b \leq n$.

Tercera forma. Supongamos que $a+b > n$. Como a cada muchacha le gustan a muchachos, en total hay an "gustos" de parte de las muchachas. Entonces, a algún muchacho le tocan al menos a "gustos", es decir, hay algún muchacho popular que le gusta a al menos a muchachas. Como al muchacho popular le gustan b muchachas y $a+b > n$, las a muchachas a las que les gusta y las b que le gustan a él no pueden todas distintas. Por lo tanto existe una muchacha con quien se gustan mutuamente.

Ahora probemos que si $a+b \leq n$ puede suceder que no haya una muchacha y un muchacho que se gusten mutuamente.

Forma 1. Etiquetamos a los muchachos y a las muchachas con los números del 1 al n. Imaginemos que a la muchacha i le gustan los muchachos $i, i+1, \ldots, i+a-1$ (los números se toman módulo n) y que al muchacho j le gustan las muchachas $j+1, j+2, \ldots, j+b$. En este caso no hay dos que se gusten mutuamente. En efecto, si a la muchacha i le gusta el muchacho j, j debe ser uno de $i, i+1, \ldots, i+a-1$, digamos $i+t$. Entonces, al muchacho j le gustan las muchachas $i+t+1, i+t+2, \ldots, i+t+b$. El primero de esos números es al menos $i+1$ y el último es a lo más $i+a+b-1 \leq i+n-1$, es decir que ninguno es i (o $i+n$).

Forma 2. Por lo que se vio en la segunda forma de la primera parte, basta pintar una cuadrícula de manera que haya a cuadros rojos en cada renglón y b azules en cada columna. Empezamos pintando los primeros a cuadros del primer renglón de rojo. El segundo renglón lo hacemos como el primero con los cuadros rojos recorridos un lugar a la derecha. El tercero es el segundo recorrido, etc. Cuando a la hora de recorrer un cuadro rojo se salga por el borde de la cuadrícula lo pasamos al principio de su renglón. Obtenemos una cuadrícula con a cuadros rojos en cada renglón y $n-a$ cuadros vacíos en cada columna. Como $n-a \geq b$ podemos simplemente elegir b cuadros de cada columna y pintarlos de azul.

Forma 3. Elegimos $a+b$ números distintos entre 1 y n, digamos $r_1, r_2, \ldots, r_a, s_1, s_2, \ldots, s_b$. Imaginemos una fiesta donde a la muchacha i le gusta el muchacho j si $i-j$ es congruente módulo n con un s_k. Así es fácil ver que a cada muchacha le gustan a muchachos: a la muchacha i le gustan los muchachos $i-r_1, i-r_2, \ldots, i-r_a$ (módulo n). Análogamente a cada muchacho le gustan b muchachas. Además, no hay dos que se gusten mutuamente, pues $i-j$ es congruente con a lo más uno de los $a+b$ números $r_1, r_2, \ldots, r_a, s_1, s_2, \ldots, s_b$.

Problema 43 (Problema 3 del Tercer Examen Estatal de la 18a OMM San Luis Potosí de 2004)

¿Existen enteros a y b de 2004 dígitos cada uno, con la propiedad de que los dígitos de b son una reordenación de los dígitos de a, y los dígitos de $a+b$ son puros nueves? ¿Existen dos enteros de 2005 dígitos con la misma propiedad? Justifica tus respuestas.

Nota: 0123 se toma como el número de 3 dígitos 123.

Solución 1 Sí existen enteros a y b de 2004 dígitos con la propiedad que se exige. El número a con 5 en los lugares impares (de izquierda a derecha) y 4 en los lugares pares, es decir

$$a = 5454545454\ldots545454,$$

y el número b con 5 en los lugares pares y 4 en los impares,

$$b = 454545454\ldots454545,$$

claramente satisfacen que

$$a+b = 999999999\ldots999999.$$

Para determinar si existen dos enteros de 2005 dígitos con la misma propiedad veamos que los números a y b serán de la forma

$$\begin{aligned} a &= a_1a_2a_3\ldots a_{2005}, \\ b &= b_1b_2b_3\ldots b_{2005}, \end{aligned}$$

donde a_i y b_i representan los dígitos de a y b en la posición i, con $i = 1, 2, 3, \ldots, 2005$ respectivamente.

Se sabe que $a_{2005}+b_{2005} = 9$ y no puede ser 19 o 29 o cualquier otro número con terminación en 9 pues $0 \leq a_{2005} \leq 9$ y $0 \leq b_{2005} \leq 9$, es decir $0 \leq a_{2005} + b_{2005} \leq 18$. Este comportamiento se cumple también para cada $i = 1, 2, \ldots, 2004$, es decir, nunca se "llevaran unidades" al siguiente dígito; de esta manera el número resultante, formado por únicamente nueves, tendrá exactamente 2005 cifras.

Ahora, supongamos que en efecto existe un número $C = 999\ldots999$ (con 2005 nueves) tal que es resultado de la suma de a y b, entonces

$$\begin{aligned} a+b &= (a_1a_2a_3\ldots a_{2005}) + (b_1b_2b_3\ldots b_{2005}) \\ &= (a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_3+b_3)\ldots(a_{2005}+b_{2005}), \end{aligned}$$

en donde cada $(a_i + b_i)$ corresponde con el i-ésimo 9 de C. Si sumamos las cifras de C tenemos

$$(a_1 + b_1)+(a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \cdots + (a_{2005} + b_{2005}) = (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2005}) + (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{2005}).$$

Pero los dígitos de a coinciden con los de b sólo que en distinto orden, por lo que

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2005}) + (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{2005}) = 2(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2005}),$$

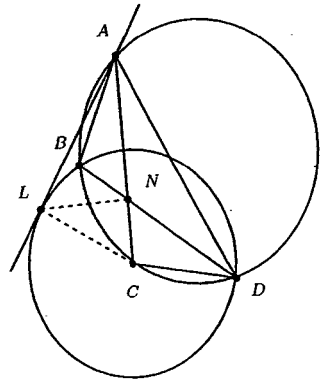
es decir, la suma de las cifras de C será par. Sin embargo, dado que C consta de 2005 nueves, la suma de sus cifras equivale a $(2005)(9) = 18045$ que es un número impar, es decir, existe una contradicción. Por lo tanto, los números a y b con 2005 dígitos tales que $C = a + b$ no existen.

Solución 2 Supongamos que tenemos dos enteros a y b de n dígitos con dicha propiedad. Si al sumar dos dígitos (uno de a y uno de b) en la misma posición decimal el resultado es un número de dos cifras, entonces la máxima suma de dichos dígitos será 18, y en este caso nunca podríamos obtener un 9. Luego, para obtener puros nueves en la suma $a + b$, cada dígito k de a se debe sumar con el dígito $9 - k$ de b. En particular debe haber la misma cantidad de 1's que de 8's, de 2's que de 7's, de 3's que de 6's y de 4's que de 5's, y por lo tanto a y b deben tener un número par de dígitos. De aquí que no hay enteros de 2005 dígitos con dicha propiedad, y es fácil ver que los números de 2004 dígitos, $a = 1818\ldots18$ y $b = 8181\ldots81$, son una solución en este caso.

Problema 44 (Problema 3 del Examen Nacional de la 9a OMM 1995)

Sean A, B, C y D vértices consecutivos de un heptágono regular, AL y AM las tangentes desde A a la circunferencia de centro C y radio CB. Sea N la intersección de AC y BD. Demuestra que los puntos L, M y N son colineales.

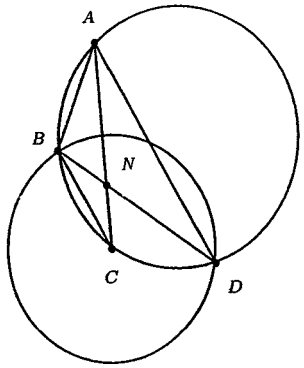
Solución 1 Como los arcos $\overset{\frown}{BC}$ y $\overset{\frown}{CD}$ son iguales, los ángulos $\angle DAC$ y $\angle BDC$ son iguales y, puesto que $\angle ACD = \angle NCD$ es común para los triángulos $\triangle ACD$ y $\triangle DCN$, tenemos que estos dos triángulos son semejantes. Luego $\frac{AC}{CD} = \frac{CD}{NC}$, pero $CD = CL$, y así tenemos que $\frac{AC}{CL} = \frac{CL}{NC}$.



Esto, junto con el hecho de que el ángulo $\angle ACL$ es común para los triángulos $\triangle ACL$ y $\triangle LCN$, nos garantiza que estos triángulos son semejantes. Pero $\triangle ACL$ es un triángulo rectángulo, luego $\triangle LCN$ también es rectángulo con ángulo recto en N, por lo que LN es perpendicular a AC. También, como $CD = CM$, tenemos que $\frac{AC}{CM} = \frac{CM}{NC}$, y de manera análoga se llega a que MN es perpendicular a AC. Luego L, M y N son colineales.

Solución 2 Tenemos que $\angle ADB = \angle DAC = \angle CAB = \angle DBC = \angle ACB = \frac{\pi}{7}$ ya que AB, BC y CD son lados de un heptágono regular. Luego $\triangle ABC$ y $\triangle BNC$ son isósceles y con los ángulos iguales, por lo tanto son semejantes. Entonces $\frac{CA}{CB} = \frac{CB}{CN}$, lo que implica que

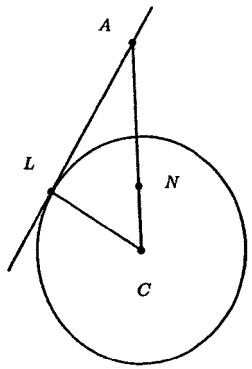
$$CN \cdot CA = CB^2.$$



De aquí hay dos formas para continuar.

Primera forma. Como CL es igual a CB, la ecuación $CN \cdot CA = CB^2$ se reescribe en la forma $CN \cdot CA = CL^2$, lo cual implica que $\frac{CA}{CL} = \frac{CL}{CN}$; esto, junto con el hecho de que en los triángu-

los $\triangle CNL$ y $\triangle CLA$ el ángulo en C es común, nos dice que los dos triángulos son semejantes (por el criterio de semejanza LAL). Puesto que $\triangle CLA$ es rectángulo, también lo es $\triangle CNL$, entonces LN es perpendicular a CA. Análogamente se puede llegar a ver que MN es perpendicular a CA, luego L, M y N son colineales.



Segunda forma. La ecuación $CN \cdot CA = CB^2$ nos garantiza que N y A son puntos inversos con respecto a la circunferencia de centro C y radio CB; y una forma de encontrar el inverso de A con respecto a tal circunferencia es trazar las tangentes desde A a la circunferencia y unir los puntos de tangencia L y M, entonces la intersección de LM con CA es el inverso, luego N se encuentra sobre la línea LM.

Problema 45 Sea X un conjunto con n elementos. Demuestra que el número de pares (A, B) tales que A y B son subconjuntos de X, A es un subconjunto de B y A es distinto de B, es $3^n - 2^n$.

Solución Recordemos el teorema del binomio, para cualquier n número entero positivo y a y b se tiene

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n}a^0 b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k.$$

Por ejemplo, podemos usar esta fórmula para calcular el número de subconjuntos de un conjunto con k elementos. Sea X un conjunto con k elementos, a sus subconjuntos los podemos clasificar de acuerdo al número de elementos: hay $\binom{k}{0}$ subconjuntos con cero elementos, $\binom{k}{1}$ subconjuntos con un elementos, etc., y finalmente hay $\binom{k}{k}$ subconjuntos con k elementos, entonces el número total de subconjuntos de X es:

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j} = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}1^{k-j}1^j = (1+1)^k = 2^k.$$

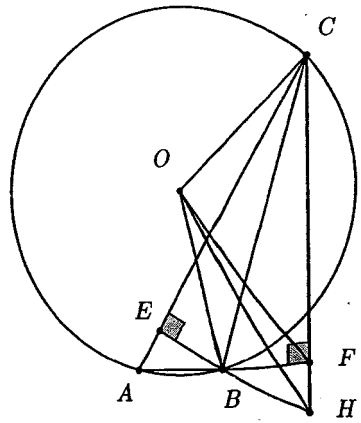
Y el número de subconjuntos distintos de X son $2^k - 1$.

Volviendo al problema, supongamos que B tiene k elementos y es subconjunto de X. De estos hay $\binom{n}{k}$, y por cada uno de ellos, el número de subconjuntos de B y distintos de B son $2^k - 1$, un total de $\binom{n}{k}(2^k - 1)$, así el número P de pares que nos piden es

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2^k - 1) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}2^k - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}1^k \\ &= (1+2)^n - (1+1)^n \\ &= 3^n - 2^n. \end{aligned}$$

Problema 46 Sea $\triangle ABC$ un triángulo con $\angle CAB = 60°$, las alturas BE y CF se cortan en H, y sea O el circuncentro de $\triangle ABC$. Demuestra que HO es bisectriz del ángulo $\angle FHB$.

Solución Dado que $\angle CAF = \angle CAB = 60°$ y $\angle CFA = 90°$ entonces $\angle FCA = 30°$. Como también se tiene que $\angle CEH = 90°$ entonces los triángulos $\triangle ACF$ y $\triangle HCE$ son semejantes y además $\angle EHC = \angle BHF = 60°$.



Los ángulos $\angle CAB$ y $\angle COB$ son respectivamente ángulos inscrito y central a la circunferencia circunscrita a $\triangle ABC$ y ambos abrazan el mismo arco por lo que se cumple que

$$\angle CAB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{CB} = \frac{1}{2}\angle COB,$$

por lo tanto $\angle COB = 120°$. Más aún, dado que los segmentos CO y OB son radios de la circunferencia entonces $\triangle COB$ es isósceles

y en consecuencia tenemos

$$\measuredangle OBC = \measuredangle OCB = \frac{180° - \measuredangle COB}{2} = 30°.$$

Ahora, los ángulos $\measuredangle COB$ y $\measuredangle BHF$ son ángulos opuestos en el cuadrilátero de vértices $COBH$, cuya suma es 180°, es decir, $COBH$ es un cuadrilátero cíclico cuyas diagonales son OH y BC.

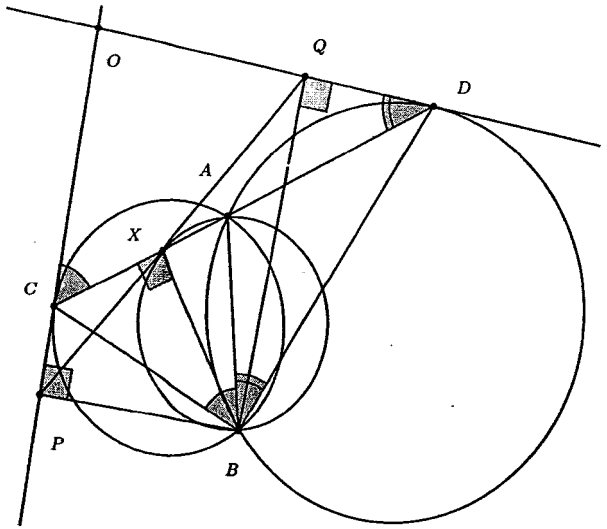
Puesto que en un cuadriátero cíclico se cumple que los ángulos que forman un lado y una diagonal y el lado opuesto con la otra diagonal son iguales, entonces $\measuredangle BHO = \measuredangle OCB$. Como además se tiene que

$$\measuredangle OHF = \measuredangle BHF - \measuredangle BHO = 60° - \measuredangle OCB = 30°$$

concluimos que $\measuredangle BHO = 30° = \measuredangle OHF$.

Problema 47 Sean A y B los puntos de intersección de dos circunferencias distintas. Sean C y D los puntos de intersección de las circunferencias con una recta que pasa por A. Sean P y Q los pies de B en las tangentes de las circunferencias que pasan por C y D respectivamente. Demuestra que PQ es tangente a la circunferencia de diámetro AB.

Solución Sea O la intersección de las rectas tangentes a las circunferencias por C y D. Sea X la intersección de CD con la circunferencia de diámetro AB como en la figura.



Demostraremos que PQ es tangente a la circunferencia de diámetro AB precisamente en el punto X, para esto verificaremos que P, X y Q son colineales y que $\measuredangle QXD = \measuredangle XBA$.

Observemos que $\measuredangle ABD = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD} = \measuredangle ADO$ y $\measuredangle CBA = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC} = \measuredangle ACO$. Además por ser ángulos interiores del triángulo $\triangle OCD$, entonces

$$\measuredangle COD + \measuredangle ADO + \measuredangle ACO = 180°.$$

De esta manera

$$\measuredangle COD + \measuredangle CBD = 180°,$$

lo cual implica que $OCBD$ es cíclico. Como a su vez $OPBQ$ es cíclico, entonces

$$\begin{aligned} \measuredangle PBQ &= 180° - \measuredangle POQ \\ &= 180° - \measuredangle COD \\ &= \measuredangle CBD, \end{aligned}$$

de esta manera

$$\measuredangle CBP = \measuredangle QBD.$$

Por otro lado, al estar X en la semicircunferencia de diámetro AB, entonces $\measuredangle CXB = 90°$, de donde $BXCP$ y $BDQX$ son cíclicos y así

$$\measuredangle CXP = \measuredangle CBP = \measuredangle QBD = \measuredangle QXD.$$

Se sigue que P, X y Q son colineales.

Como los ángulos interiores de $\triangle DQX$ suman 180° y $BDQX$ es cíclico, entonces

$$\begin{aligned} \measuredangle QXD &= 180° - \measuredangle XQD - \measuredangle QDX \\ &= \measuredangle XBD - \measuredangle QDX \\ &= \measuredangle XBA + \measuredangle ABD - \measuredangle QDX \\ &= \measuredangle XBA, \end{aligned}$$

ya que $\measuredangle QDX = \measuredangle ADO = \measuredangle ABD$. Por lo que concluimos que PQ es tangente a la circunferencia de diámetro AB en X.

Problema 48 (Problema 5 del Examen Nacional de la 14a OMM 2000)

Se tiene un tablero de $n \times n$ pintado como un tablero de ajedrez. Está permitido efectuar la siguiente operación en el tablero: escoger un rectángulo en la cuadrícula tal que las longitudes de sus lados sean ambas pares o ambas impares, pero que no sean las dos iguales al mismo tiempo, e invertir los colores de los cuadritos de ese rectángulo (es decir, los cuadritos del rectángulo que antes eran blancos, ahora son negros y viceversa).

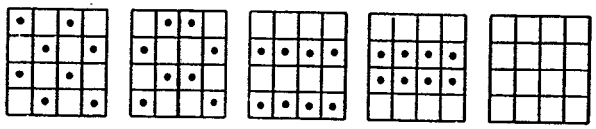
Encuentra cuáles son los valores de n' que hacen posible lograr que todos los cuadritos queden de un mismo color después de haber efectuado la operación el número de veces que sea necesario.

Nota: La dimensión de los rectángulos que se escogen puede ir cambiando.

Solución Es claro que para $n = 2$ es imposible. Afirmamos que sí es posible para toda $n > 2$. Tomemos primero el caso n impar. Elegimos los rectángulos de $1 \times n$ y cambiamos de color todos los renglones en posición impar. De esta manera todas las columnas en posición impar quedan blancas y todas las columnas en posición par quedan negras; entonces con rectángulos de $n \times 1$ cambiamos las columnas en posición par para lograr que todos los cuadros sean blancos.

Para ver el caso cuando $n = 2^a b$, donde $a \geq 1$ y b impar distinto de 1, subdividimos el tablero en tableros de $b \times b$ y hacemos en cada tablero de $b \times b$ las operaciones que indicamos en el caso n impar.

Nos falta analizar las potencias de 2. Por un argumento similar al que describimos en el caso anterior, basta analizar el caso $n = 4$, el cual indicamos en los siguientes dibujos, en los que hemos escogido un rectángulo de 2×4 o de 4×2 para hacer la operación en cada paso:



Problema 49 (Problema 4 de la 36a Olimpiada Matemática Española Fase Nacional 2000)

Encuentra el mayor número entero n tal que cumpla las siguientes condiciones

- $E\left(\frac{n}{3}\right)$ tiene sus tres cifras iguales.
- $E\left(\frac{n}{3}\right)$ es un número triangular, es decir, existe un natural n tal que

$$E\left(\frac{n}{3}\right) = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n.$$

Nota: $E(x)$ es la parte entera de n.

Solución Los posibles valores de $E\left(\frac{n}{3}\right)$ son: $999, 888, \ldots, 111$. Por otro lado la suma de los primeros n números es $\frac{n(n+1)}{2}$. Supongamos que tenemos un número de la forma xxx, queremos ver si existe n tal que

$$\frac{n(n+1)}{2} = xxx,$$

esto es, $n(n+1) = 2(xxx)$. Los números $2(xxx)$ son

$$\begin{aligned} 2(999) &= 1998, \\ 2(888) &= 1776, \\ &\vdots \\ 2(111) &= 222. \end{aligned}$$

Dado que los números de la forma $n(n+1)$ terminan solamente en 0, 2 y 6, entonces sólo nos queda por considerar

$$\begin{aligned} 2(888) &= 1776, \\ 2(666) &= 1332, \\ 2(555) &= 1110, \\ 2(333) &= 666, \\ 2(111) &= 222. \end{aligned}$$

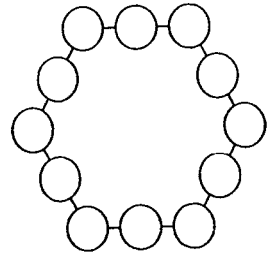
Notemos que $1776 = (2^4)(3)(37)$ no tiene la forma $n(n+1)$ para ningún n. Sin embargo,

$$1332 = (2^2)(3^2)(37) = 36 \cdot 37$$

sí tiene la forma deseada, es decir el número 666 es un número triangular.

Finalmente, el número n más grande tal que $E\left(\frac{n}{3}\right) = 666$ es $n = 2000$.

Problema 50 Los números del 1 al 12 se colocan (sin repetir) en los círculos del siguiente arreglo hexagonal.

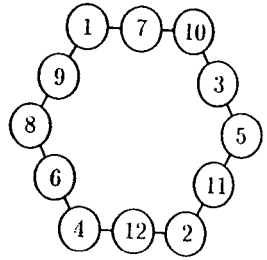


(a) Demuestra que no existe una forma de acomodarlos que cumpla que la suma de los números que están a cada uno de los lados del hexágono sea 16.

(b) Muestra que existe un acomodo en donde la suma en cada uno de los lados del hexágono sea 18.

Solución 1 (a) Vamos a suponer que sí es posible que la suma de cada uno de los lados del hexágono es 16. Al sumar lo que da en cada cara obtenemos un total de $6(16) = 96$. Ahora, al sumar los números del 1 al 12 nos da 78. En la primer suma estamos repitiendo la suma de los vértices del hexágono, entonces la suma de los vértices debe dar $96 - 78 = 18$. Pero no es posible que la suma de 6 números enteros positivos y distintos, nos de 18. Entonces este acomodo no es posible.

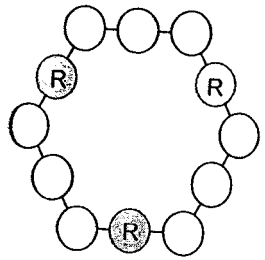
(b) Un acomodo posible para que los lados sumen 18 es 1, 7, 10, 3, 5, 11, 2, 12, 4, 6, 8, 9, asignando 1 a cualquier vértice del hexágono y siguiendo el sentido de las manecillas del reloj.



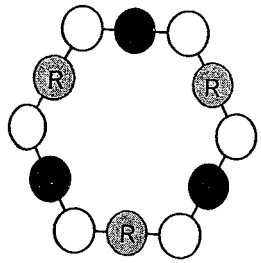
Solución 2 Para la parte (a) del problema. La suma de los primeros 12 números está dado por

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(12)(13)}{2} = 78.$$

Si sumamos los números de 3 lados no adyacentes como se muestra en la siguiente figura obtenemos 48, por lo que los números que sobran suman $78 - 48 = 30$, los marcamos en rojo (denotado por R).



Ahora si tomamos los otros tres lados no adyacentes, obtenemos que la suma de los números marcados en negro suman también 30.



Al buscar los conjuntos de 3 números, del 1 al 12 y sin repetir, que sumen 30 obtenemos

$$12, 11, 7$$
$$12, 10, 8$$
$$11, 10, 9.$$

No podemos tomar dos conjuntos ajenos cuya suma sea 30, así que este acomodo no es posible. Otra forma es ver que la suma de los seis vértices restantes debe ser $78 - 30 - 30 = 18$, lo cual no es posible.

Problema 51 Si en un triángulo cualquiera se construyen exteriormente triángulos equiláteros en los lados del triángulo original, demuestra lo siguiente:

(a) Los tres segmentos formados uniendo un vértice del triángulo original con el vértice opuesto del triángulo equilátero construido en el lado opuesto, son iguales.

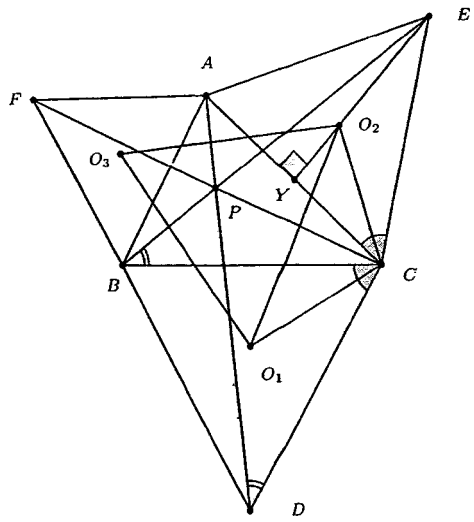
(b) Los segmentos obtenidos en el inciso anterior, son concurrentes.

(c) La razón entre el lado de cada triángulo equilátero y su circunradio es igual a $\sqrt{3}$.

(d) Dado un vértice del triángulo original, el triángulo formado uniendo este vértice con los circuncentros de los triángulos equiláteros adyacentes es semejante al triángulo formado por este vértice y otro vértice del triángulo original junto con el vértice opuesto del triángulo equilátero construido en el lado opuesto.

(e) Concluye que los cincuncentros de los triángulos equiláteros forman a su vez un triángulo equilátero.
Nota: A este último resultado se le conoce como el Teorema de Napoleón.

Solución Consideremos un triángulo $\triangle ABC$ y los puntos D, E y F tales que los triángulos $\triangle BDC$, $\triangle CEA$ y $\triangle AFB$ construidos exteriormente son equiláteros.



(a) Como $DC = BC$, $AC = CE$ y además

$$\measuredangle DCA = 60^\circ + \measuredangle BCA = \measuredangle BCE,$$

por el criterio LAL, tenemos que los triángulos $\triangle DCA$ y $\triangle BCE$ son congruentes, de donde $AD = BE$. De manera semejante se puede demostrar la igualdad con el segmento que une C con F, de donde obtenemos

$$AD = BE = CF.$$

(b) Sea P la intersección AD con BE. Demostraremos que $\measuredangle CPF = 180^\circ$. Como los triángulos $\triangle DCA$ y $\triangle BCE$ son congruentes, entonces $\measuredangle CDP = \measuredangle CBP$, por lo que el cuadrilátero $BDCP$ es cíclico. Luego, al ser $\triangle BDC$ equilátero entonces $\measuredangle BDC = 60^\circ$, lo cual implica que $\measuredangle BPC = 120^\circ$. De igual manera se puede probar que $CEAP$ es cíclico, lo cual implica que $\measuredangle CPA = 120^\circ$. Por lo tanto $\measuredangle APB = 120^\circ$.
Como $\triangle AFB$ equilátero entonces

$$\measuredangle AFB + \measuredangle APB = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ,$$

de donde $AFBP$ es cíclico. Por lo tanto $\measuredangle FPB = \measuredangle FAB = 60^\circ$. Finalmente tenemos que

$$\measuredangle FPB + \measuredangle BPC = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ,$$

de donde concluimos que el segmento CF pasa por P.

(c) Sean O_1, O_2 y O_3 los circuncentros de los triángulos $\triangle BDC$, $\triangle CEA$ y $\triangle AFB$ respectivamente y sea Y el punto medio de AC. Como $\triangle CEA$ es equilátero, la mediatriz YO_2 pasa por E y CO_2 es bisectriz de $\measuredangle ACE$, luego

$$\measuredangle YCO_2 = 30^\circ = \measuredangle YEC.$$

Por el criterio AA los triángulos $\triangle EYC$ y $\triangle CYO_2$ son semejantes, de donde

$$\frac{CE}{CO_2} = \frac{CY}{YO_2} = \sqrt{3}.$$

Esto mismo sucede con cada lado y circunradio de los triángulos equiláteros.

(d) Por el inciso anterior

$$\frac{CE}{CO_2} = \sqrt{3} = \frac{BC}{CO_1}$$

y además

$$\measuredangle BCE = \measuredangle BCA + 60^\circ = \measuredangle O_1CO_2.$$

Por el criterio LAL tenemos que los triángulos $\triangle BCE$ y $\triangle O_1CO_2$ son semejantes. De forma semejante se procede con los otros triángulos.

(e) Por el inciso anterior tenemos que los triángulos $\triangle BCE$ y $\triangle O_1CO_2$ son semejantes, de donde

$$\frac{BE}{O_1O_2} = \sqrt{3},$$

es decir $O_1O_2 = \sqrt{3}BE$. Análogamente obtenemos que $O_2O_3 = \sqrt{3}CF$ y $O_1O_3 = \sqrt{3}AD$. Como por el primer inciso $AD = BE = CF$, entonces

$$O_1O_2 = O_2O_3 = O_1O_3$$

y así $\triangle O_1O_2O_3$ es equilátero.

Problema 52 Un entero positivo n se llama divisor cuadrático si siempre que n divide a $m^n - 1$, para algún entero m, también se cumple que n^2 divide a $m^n - 1$.

(a) Demuestra que cualquier número primo es divisor cuadrático.

(b) Demuestra que hay una infinidad de números compuestos que son divisores cuadráticos.

Solución (a) Sea p un número primo con $m^p \equiv 1 \pmod{p}$ para algún entero m. Por el pequeño Teorema de Fermat, $m^p \equiv m \pmod{p}$, por lo que $m \equiv 1 \pmod{p}$. Sea k tal que $m = kp + 1$, entonces

$$\begin{aligned} m^p - 1 &= (kp+1)^p - 1 \\ &= \left(\sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} k^i p^i\right) - 1 \\ &= \sum_{i=1}^{p} \binom{p}{i} k^i p^i \\ &= p(kp) + \sum_{i=2}^{p} \binom{p}{i} k^i p^i. \end{aligned}$$

Ya que p^2 es divisor de los últimos dos sumandos, es divisor de $m^p - 1$, entonces p es divisor cuadrático.

(b) Probemos que todo número de la forma $2p$ con $p \geq 3$ número primo, es un divisor cuadrático.
Supongamos que $m^{2p} \equiv 1 \pmod{2p}$ para algún entero m. Como 2 y p son primos entre sí, $m^{2p} \equiv 1 \pmod{2p}$ si y sólo si $m^{2p} \equiv 1 \pmod{p}$ y $m^{2p} \equiv 1 \pmod{2}$. Por el pequeño Teorema de Fermat, $m^p \equiv m \pmod{p}$, así, $m^{2p} \equiv m^2 \pmod{p}$. Entonces $m^2 \equiv 1 \pmod{p}$, y esto pasa si y sólo si $(m+1)(m-1) \equiv 0 \pmod{p}$; como p es primo, se sigue que $m \equiv \pm 1 \pmod{p}$. Entonces existe k entero tal que

$m = kp \pm 1$, de aquí

$$\begin{aligned} m^{2p} - 1 &= (kp \pm 1)^{2p} - 1 \\ &= \left(\sum_{i=0}^{2p} \binom{2p}{i} (-1)^{2p-i} k^i p^i\right) - 1 \\ &= \sum_{i=1}^{2p} \binom{2p}{i} (-1)^{2p-i} k^i p^i \\ &= -\binom{2p}{1} kp + \sum_{i=2}^{2p} \binom{2p}{i} (-1)^{2p-i} k^i p^i. \end{aligned}$$

De este modo, $m^{2p} - 1$ es divisible por p^2. Por otro lado, como $m^{2p} - 1$ es múltiplo de 2, m debe ser impar, así $m^{2p} - 1 = (m^p + 1)(m^p - 1)$ y ambos factores son pares, por lo que el producto es múltiplo de 4.
Finalmente, como 4 y p^4 son primos relativos, se sigue que $m^{2p} - 1$ es múltiplo de $4p^2 = (2p)^2$.

Problema 53 (Problema 1 del Examen Nacional de la 9a OMM 1995)
En una Olimpiada de Matemáticas los concursantes están ocupando todos los asientos de un salón rectangular donde los asientos están acomodados en filas (hay más de dos filas y en cada fila más de dos asientos). Al inicio del examen un profesor les sugiere que se deseen suerte dándose la mano, cada uno de los concursantes estrecha la mano de los concursantes que se encuentran a su alrededor (que pueden ser a lo más 8) y solamente a éstos. Alguien observa que se dieron 1020 apretones de manos. ¿Cuántos concursantes hay?

Solución 1 Sea n el número de filas y m la cantidad de lugares en cada fila del salón.

- Cada una de las $(n-2)(m-2)$ personas que están en el interior del rectángulo saluda a ocho personas que están a su alrededor.
- Cada una de las $2[(n-2)+(m-2)]$ personas que están en las orillas del rectángulo, pero no en las esquinas, saluda a cinco personas.
- Las cuatro personas de las esquinas, saludan a tres.

Así, contando los saludos dos veces y desarrollando tenemos

$$\begin{aligned} 8(n-2)(m-2) + 10[(n-2)+(m-2)] + 12 &= 2040 \\ 8nm - 6n - 6m &= 2036 \end{aligned}$$

Para resolver esta ecuación buscamos una factorización.

$$\begin{aligned} 16mn - 12m - 12n &= 4072 \\ 16mn - 12m - 12n + 9 &= 4081 \\ 4n(4m-3) - 3(4m-3) &= 4081 \\ (4n-3)(4m-3) &= 7 \cdot 11 \cdot 53 \end{aligned}$$

Como 7 y 11 no son de la forma $4s - 3$, las únicas soluciones son: $4n - 3 = 77$ y $4m - 3 = 53$ o bien $4n - 3 = 53$ y $4m - 3 = 77$, por lo que $n = 20$ y $m = 14$ o bien $n = 14$ y $m = 20$. En cualquier caso el número de concursantes es $14 \cdot 20 = 280$.

Solución 2 Una vez que se establece la ecuación $8nm - 6n - 6m = 2036$, procedemos a resolverla utilizando congruencias. La ecuación es equivalente a $4nm - 3n - 3m = 1018$, de donde $n(4m-3) = 3m + 1018$. Simplificando módulo $4m - 3$ tenemos la siguiente sucesión de congruencias equivalentes.

$$\begin{aligned} 3m + 1018 &\equiv 0 \pmod{4m-3} \\ 12m + 4072 &\equiv 0 \pmod{4m-3} \\ 3(4m-3) + 4081 &\equiv 0 \pmod{4m-3} \\ 4081 &\equiv 0 \pmod{4m-3} \end{aligned}$$

Entonces $4m - 3$ es divisor de $4081 = 7 \cdot 11 \cdot 53$ y así las posibilidades para $4m - 3$ son 1, 7, 11, 53, 77, 371, 583 y 4081. Como m y n no pueden ser 1, las únicas posibilidades son $m = 14$ (y $n = 20$) o $m = 20$ (y $n = 14$). En cualquier caso, el número de alumnos es $14 \cdot 20 = 280$.

Problema 54 Si a, b, c son números positivos con $a+b+c = 2$ demuestra que

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \geq 1.$$

Solución Observemos primero que

$$\frac{a^2}{a+b} = \frac{a(a+b) - ab}{a+b} = a - \frac{ab}{a+b}.$$

Como $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ entonces se cumple que $\frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{4}$,

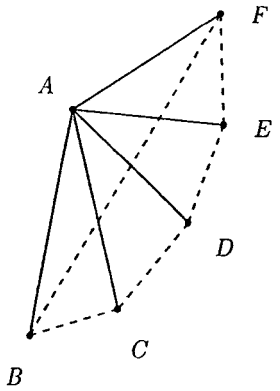
de donde obtenemos $\frac{ab}{a+b} > \frac{a+b}{4}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a} &= \left(a-\frac{ab}{a+b}\right)+\left(b-\frac{bc}{b+c}\right)+\left(c-\frac{ca}{c+a}\right)\\ &> (a+b+c)-\left(\frac{a+b}{4}+\frac{b+c}{4}+\frac{c+a}{4}\right)\\ &= \frac{a+b+c}{2}\\ &= 1.\end{aligned}$$

Problema 55 (Problema 2 del Examen Nacional de la 9a OMM 1995) Considera seis puntos en el plano con la propiedad de que ocho de las distancias entre ellos son iguales a 1. Demuestra que al menos tres de los puntos forman un triángulo equilátero de lado 1.

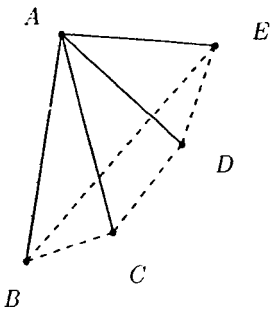
Solución Llamemos A, B, C, D y F a los puntos. Trabajaremos por casos.

Caso 1. De algún punto, que supondremos sin pérdida de generalidad que es A, salen cinco distancias iguales a 1.



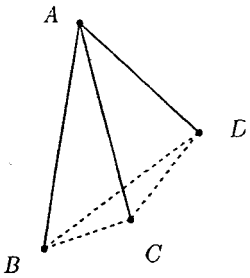
Entre B, C, D, E y F hay $\binom{5}{2} = 10$ distancias, así que una de estas es unitaria pues, en caso contrario, sólo habría 5 distancias unitarias ya que el total de distancias es $\binom{6}{2} = 15$. Los extremos de este segmento junto con el punto A forman el triángulo equilátero (si, por ejemplo, el segmento unitario fuera BC, entonces $\triangle ABC$ sería el triángulo buscado).

Caso 2. De algún punto salen sólo cuatro distancias iguales a 1.

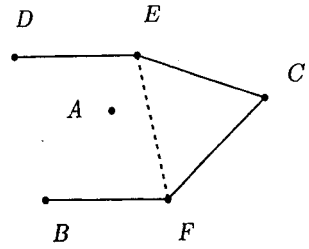


Entre B, C, D y E hay $\binom{4}{2} = 6$ distancias. Si ninguna de estas seis distancias es unitaria, entonces las otras cuatro distancias unitarias salen del punto F y van a dar a B, C, D y E, pero el único punto que puede estar a distancia 1 de B, C, D, E es A, (pues A es el centro del círculo que pasa por ellos) luego $F = A$, lo cual es una contradicción. Entonces entre las seis distancias hay una unitaria y los extremos de este segmento junto con el punto A forman el triángulo buscado.

Caso 3. De algún punto salen sólo tres distancias iguales a 1.



Si alguna distancia de BC, CD o DB es igual a 1, terminamos. Supongamos que ninguna es igual a 1; entonces las restantes cinco distancias unitarias salen de E o F.



Entonces en el pentágono $BCDEF$ hay cinco distancias unitarias y BC, CD y DB no lo son. Si E tuviera distancia igual a 1 con B, C, o D, entonces $E = A$, así que E a lo más tiene dos distancias iguales a 1 con B, C y D, y lo mismo ocurre con

F. Como falta una distancia igual a 1, entonces ésta debe ser entre E y F. Tenemos que de cada uno de E y F salen dos distancias unitarias que van a los vértices B, C, D, luego a alguno de estos vértices, por ejemplo C, llegan dos distancias unitarias y así el triángulo buscado es $\triangle CEF$.

Finalmente observemos que siempre se está en un caso de los anteriores, pues si de ningún vértice no salieran más de dos distancias unitarias, entonces a lo más habría seis distancias iguales a 1.

Capítulo 6

Soluciones de la 26a OMM Concurso Nacional

6.1. Primer Día

Problema 1 Sean $\mathcal{C}_1$ una circunferencia con centro O, P un punto sobre ella y ℓ la recta tangente a $\mathcal{C}_1$ en P. Considera un punto Q sobre ℓ, distinto de P, y sea $\mathcal{C}_2$ la circunferencia que pasa por O, P y Q. El segmento OQ interseca a $\mathcal{C}_1$ en S y la recta PS interseca a $\mathcal{C}_2$ en un punto R distinto de P. Si r_1 y r_2 son las longitudes de los radios de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, respectivamente, muestra que

$$\frac{PS}{SR} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Solución 1 Como ℓ es tangente a $\mathcal{C}_1$ en P, $\angle OPQ = 90°$, así que OQ es diámetro de $\mathcal{C}_2$. Por lo tanto, el centro O' de $\mathcal{C}_2$ es el punto medio de OQ. Si M y N son los puntos medios de PS y PR, respectivamente, entonces OM y $O'N$ son perpendiculares a PR. De aquí que OM y $O'N$ son paralelas. Así $\triangle OMS$ y $\triangle O'NS$ son semejantes, por lo que

$$\frac{MS}{OS} = \frac{NS}{O'S} = \frac{NS+SM}{O'S+SO} = \frac{NM}{O'O},$$

de donde

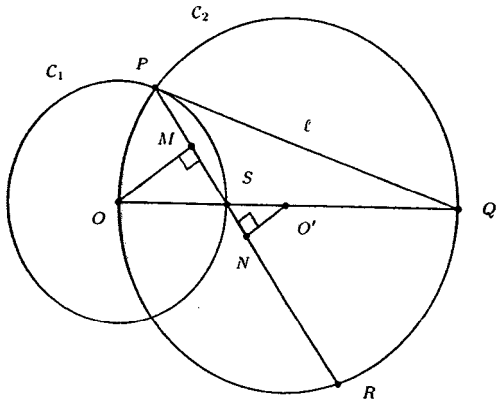
$$\frac{MS}{NM} = \frac{OS}{O'O} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Por otro lado, $MS = \frac{1}{2}PS$ y

$$MN = \frac{1}{2}PR - \frac{1}{2}PS = \frac{1}{2}SR.$$

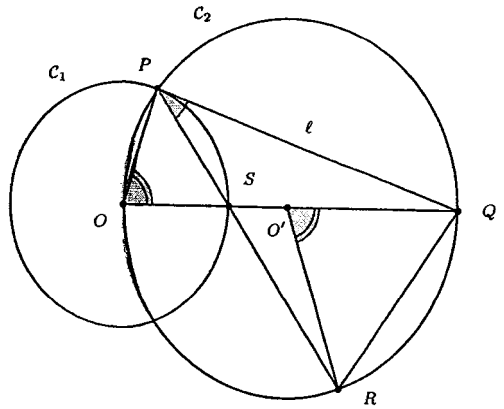
Concluimos que

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{MS}{NM} = \frac{\frac{1}{2}PS}{\frac{1}{2}PR \quad \frac{1}{2}PS} = \frac{PS}{SR}.$$



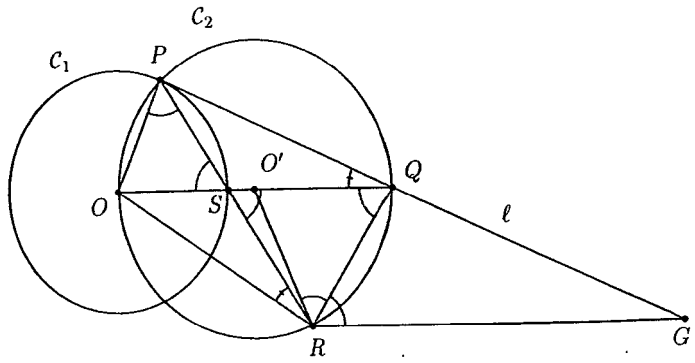
Solución 2 Sea O' el centro de C_2. Por ángulos semi-inscritos en la circunferencia C_1 se tiene que $2\angle RPQ = \angle SOP$ y por ángulos inscritos en C_2 ocurre que $\angle RO'Q = 2\angle RPQ = \angle SOP$. Además $OP = OS$ y $O'Q = O'R$, entonces por criterio de semejanza LAL, $\triangle OPS$ y $\triangle O'QR$ son semejantes. Por otro lado tenemos que el cuadrilátero $OPQR$ es cíclico, de donde $\angle OPS = \angle SQR$. Como $\triangle OPS$ es isósceles se tiene que $\angle OPS = \angle PSO = \angle RSQ$, por lo que $\triangle QRS$ es isósceles con $QR = SR$. De esta última igualdad y de la semejanza de los triángulos $\triangle OPS$ y $\triangle O'QR$ se sigue que

$$\frac{PS}{SR} = \frac{PS}{QR} = \frac{OP}{O'Q} = \frac{r_1}{r_2}.$$



Solución 3 Sean O' el centro de C_2 y G la intersección de ℓ con una recta paralela a OQ que pase por R. Entonces se tiene las siguientes igualdades entre ángulos

$$\angle RSQ = \angle OSP = \angle OPR = \angle OQR = \angle QRG = \angle O'RQ.$$



Además también tenemos que $\angle ORP = \angle OQP = \angle RGQ$. Utilizando el criterio AA tenemos que $\triangle ORP$ y $\triangle QGR$ son semejantes, de donde $\frac{r_1}{QR} = \frac{OR}{QG}$. Lo cual implica que

$$\frac{1}{QG} = \frac{r_1}{QR \cdot OR}.$$

De nuevo, por el criterio AA, tenemos que $\triangle O'RQ$ y $\triangle OSP$ son semejantes, de donde $\frac{r_2}{OS} = \frac{RQ}{PS}$. Luego

$$\frac{PS}{OS} = \frac{RQ}{r_2}.$$

Además por el criterio AA también tenemos que $\triangle ORS$ y $\triangle PQS$ son semejantes y, utilizando la relación anterior, tenemos

$$\frac{PQ}{OR} = \frac{PS}{OS} = \frac{RQ}{r_2}$$

Finalmente, por el Teorema de Thales y sustituyendo la primer relación que obtuvimos, concluimos que

$$\frac{PS}{SR} = \frac{PQ}{QG} = \frac{OR \cdot RQ}{r_2} \cdot \frac{r_1}{QR \cdot OR} = \frac{r_1}{r2}.$$

Problema II Sea $n \geq 4$ un número par. Considera una cuadrícula de $n \times n$. Dos celdas (cuadraditos de 1×1) son *vecinas* si comparten un lado, si están en extremos opuestos de un mismo renglón o si están en

extremos opuestos de una misma columna. De esta forma, toda celda en la cuadrícula tiene exactamente cuatro celdas vecinas.

En cada celda está escrito un número del 1 al 4 de acuerdo con las siguientes reglas:

- Si en una celda está escrito un 2 entonces en dos o más celdas vecinas está escrito un 1.
- Si en una celda está escrito un 3 entonces en tres o más celdas vecinas está escrito un 1.
- Si en una celda está escrito un 4 entonces en las cuatro celdas vecinas está escrito un 1.

Entre los acomodos que cumplan las condiciones anteriores, ¿cuál es el máximo número que se puede obtener sumando los números escritos en todas las celdas?

Solución El máximo valor que se puede obtener es $\frac{5n^2}{2}$. Daremos un acomodo y luego probaremos que es máximo.

Acomodo máximo. Para dar un acomodo máximo, tomemos un arreglo tipo ajedrez con 1's y 4's. Este acomodo es válido pues alrededor de cada 4 tenemos cuatro unos.

Tenemos $\frac{n^2}{2}$ entradas que tienen un 1 y $\frac{n^2}{2}$ que tienen un 4. Así, la suma total es $\frac{n^2}{2} + \frac{4n^2}{2} = \frac{5n^2}{2}$.

Solución 1 **Cota superior.** Consideremos una teselación de la cuadrícula en $\frac{n^2}{2}$ cuadrados de 2×2.

Si tuviéramos un arreglo que sumara más de $\frac{5n^2}{2}$ entonces por principio de las casillas en al menos uno de estos cuadrados se tiene una suma de 11 o más. Usando de nuevo el principio de las casillas, esto implica que alguno de los dominós que forman al cuadrado de 2×2 tiene suma de al menos 6.

La única forma de tener dos cuadraditos adyacentes de suma al menos 6 es que sean 3 y 3, pues 4 y 2 o bien 4 y 3 son imposibles por las condiciones del problema.

Pero si tenemos 3 y 3, entonces en todas las celdas vecinas a éstas tenemos unos. En particular, el cuadrado de 2×2 que consideramos tiene suma 8, lo que es una contradicción.

Solución 2 **Cota superior.** Partamos la cuadrícula en subcuadrículas de 2×2. Sea A una de esas subcuadrículas. Veremos que la suma s de los 4 números de A es menor o igual que 10.

Sea m el número máximo de A y digamos que m aparece en el cuadrito c. Si $m = 4$, entonces los cuadritos vecinos a c en A deben ser 1, así que $s \leq 4 + 1 + 1 + 4 = 10$. Si $m = 3$, entonces alguno de los cuadritos vecinos a c en A es 1 y no puede haber tres 3's

así que $s \leq 3 + 1 + 3 + 2 = 9$. Por último, si $m \leq 2$, entonces $s \leq 2 + 2 + 2 + 2 = 8$. Sumando las $\frac{n^2}{4}$ desigualdades que nos dan las subcuadrículas de 2×2 obtenemos que la suma total S cumple $S \leq 10\frac{n^2}{4} = \frac{5n^2}{2}$.

Solución 3 **Cota superior.** Para cada celda consideremos el número $4c + u + v + x + y$, donde c es el número de dicha celda y u, v, x, y son los números de las celdas vecinas. Afirmamos que $4c + u + v + x + y \leq 20$. En efecto, las condiciones del problema nos dan las siguientes cotas:

- Si $c = 1$, entonces $4c + u + v + x + y \leq 4(1) + 4 + 4 + 4 + 4 = 20$.
- Si $c = 2$, entonces $4c + u + v + x + y \leq 4(2) + 1 + 1 + 4 + 4 = 18$.
- Si $c = 3$, entonces $4c + u + v + x + y \leq 4(3) + 1 + 1 + 1 + 4 = 19$.
- Si $c = 4$, entonces $4c + u + v + x + y \leq 4(4) + 1 + 1 + 1 + 1 = 20$.

Tenemos n^2 desigualdades de este estilo. Sumando todas estas desigualdades, a la izquierda aparece cada número sumado 8 veces (cuatro veces cuando le toca ser c y cuatro veces, una por cada una de las celdas vecinas). Así, si S es la suma total

$$8S \leq 20n^2.$$

Esto implica que

$$S \leq \frac{5n^2}{2}.$$

Solución 4 **Cota superior.** Tomemos una cuadrícula C con suma máxima. Primero demostraremos que en C no puede haber una celda con 2. Supongamos que sí la hay para llegar a una contradicción. Sea A una celda con 2. Si A tuviera tres o más vecinas con 1, entonces podrá cambiarse por 3 y encontrar un acomodo de suma mayor, contradiciendo la maximalidad de C. Así, A debe tener exactamente dos vecinas con 1. Como A tiene 2, entonces no puede tener vecinas con 4. De este modo, cambiando a A por 1 y sumando 1 a sus vecinas que no tienen escrito 1, encontramos un acomodo con mayor suma que C, de nuevo contradiciendo su maximalidad.

Ahora veremos que al menos la mitad de las celdas de C tienen escrito un 1. Supongamos que no es así. Partiendo la cuadrícula en tableros de 2×2 (lo cual es posible por la paridad de n), obtenemos por el principio de las casillas que alguno de los tableros de 2×2 tienen un 1 o ninguno. Entonces, este tablero tiene tres celdas A_1, A_2 y A_3 que no tienen 1. Digamos, sin pérdida de generalidad, que A_2 es vecina de A_1 y A_3. Como A_2 tiene 2 vecinas que no tienen 1, entonces tiene escrito a lo más un 2. Pero como no tiene escrito un 1, entonces tiene escrito un 2, contradiciendo lo que probamos anteriormente.

Así, un acomodo máximo debe tener al menos $\frac{n^2}{2}$ unos y por tanto la suma está acotada por $\frac{n^2}{2} + 4\frac{n^2}{2} = \frac{5n^2}{2}$.

Solución 5 **Cota superior.** En esta solución estudiaremos las posibles fichas horizontales de 1×4 que puede haber. Consideremos el siguiente análisis de casos para estudiar las sumas posibles que se pueden tener:

- Si la ficha no tiene 4's y tiene a lo más dos 3's, entonces la suma es menor o igual a $3 + 3 + 2 + 2 = 10$.
- Si la ficha no tiene 4's y tiene tres 3's, entonces ya no puede tener un cuarto 3 y tiene que quedar $(3, 3, 1, 3)$ o el simétrico. La suma es 10.
- Si tiene un 4 y no está en la orilla, entonces a sus lados hay 1's y por tanto la suma es a lo más 10.
- Si tiene un 4 en la orilla, se fuerza un 1 adyacente. Las otras dos entradas a lo más cada una tiene un 3 y por tanto para que tenga suma mayor a 10 debe ser $(4, 1, 3, 3)$ o el simétrico. Este caso, con suma 11, le llamamos $\star$.
- Tener al menos dos 4's fuerza a tener $(4, 1, 4, 1)$ o el simétrico, con suma 10.

Si $n = 4$, entonces el caso $\star$ es imposible (pues el 4 de la orilla tendría un 3 vecino) y por tanto cada 1×4 tiene suma a lo más 10, obteniendo la cota sumando los 4 renglones. Trabajemos con $n > 4$.

Sumemos todas las fichas de 1×4, aunque se traslapen. Todas ellas tienen suma menor o igual que 10 a menos que tengamos una $\star$. Pero si tenemos $\star$, entonces se fuerza con sus vecinas unos: $(1, 4, 1, 3, 3, 1)$. Entonces, las 3 fichas de 1×4 involucradas suman $9 + 11 + 8 = 28$, de modo que pudimos pensar que cada una de estas tenía suma menor o igual a 10.

Así, cada casilla queda considerada cuatro veces y sumando las desigualdades de las n^2 fichas tenemos

$$4S \leq 10n^2.$$

Una vez más, obtenemos la cota deseada.

Problema III Muestra que entre cualesquiera 14 números enteros positivos consecutivos siempre hay 6 números tales que cualesquiera dos de ellos son primos relativos.

Nota: Dos números a, b son primos relativos si su único divisor común positivo es el 1.

Solución 1 Primero demostremos el siguiente lema.

Lema 1 *Si k, r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6 números enteros tales que para todo $1 \leq i < j \leq 6$ los números $r_j - r_i$ no tienen divisores primos $p \leq 7$ y además $(r_i, r_j, 30) = 1$, entonces los números*

$$30k + r_1,\ 30k + r_2,\ 30k + r_3,\ 30k + r_4,\ 30k + r_5,\ 30k + r_6$$

son coprimos por parejas.

Demostración. Si para algunos $1 \leq i < j \leq 6$ un primo p divide $30k + r_i$ y $30k + r_j$, entonces $p \mid r_j - r_i$ implicando $p \mid 30$ (pues $r_j - r_i$ no tiene divisores primos $p \geq 7$). Esto implica que $p \mid r_i$ y $p \mid r_j$, lo cual es una contradicción con el hecho de que $(r_i, r_j, 30) = 1$.

■

Ahora, sea $S = \{a,\ a + 1, \ldots,\ a + 13\}$ el conjunto de 14 números enteros consecutivos. El número a es congruente con uno de los 30 números $0, 1, 2, \ldots, 29$ módulo 30. Consideremos 6 casos.

1. El número a es congruente con uno de los números 0, 1, 2, 3, 4, 5 módulo 30. Esto significa que entre a, $a+1$, $a+2$, $a+3$, $a+4$, $a+5$ hay un número de la forma $30k + 5$. En este caso los seis números

   $$30k + 5,\ 30k + 7,\ 30k + 8,\ 30k + 9,\ 30k + 11,\ 30k + 13$$

   pertenecen a S y, por el lema, son coprimos por parejas.
2. El número a es congruente con uno de los números 6, 7, 8, 9, 10, 11 módulo 30. Entonces entre a, $a + 1$, $a + 2$, $a + 3$, $a + 4$, $a+5$ hay un número de la forma $30k + 11$. En este caso los seis números

   $$30k + 11,\ 30k + 13,\ 30k + 15,\ 30k + 16,\ 30k + 17,\ 30k + 19$$

   pertenecen a S y son coprimos por parejas.
3. El número a es congruente con uno de los números 12, 13 módulo 30. Entonces entre a, $a + 1$ hay un número de la forma $30k + 13$. En este caso los seis números

   $$30k + 13,\ 30k + 14,\ 30k + 15,\ 30k + 17,\ 30k + 19,\ 30k + 23$$

   pertenecen a S y son coprimos por parejas.
4. El número a es congruente con uno de los números 14, 15, 16, 17 módulo 30. Entonces entre a, $a+1$, $a+2$, $a+3$ hay un número de la forma $30k + 17$. En este caso los seis números

   $$30k + 17,\ 30k + 19,\ 30k + 22,\ 30k + 23,\ 30k + 25,\ 30k + 27$$

   pertenecen a S y son coprimos por parejas.
5. El número a es congruente con uno de los números 18, 19, 20, 21, 22, 23 módulo 30. Entonces entre a, $a+1$, $a+2$, $a+3$, $a+4$, $a+5$ hay un número de la forma $30k + 23$. En este caso los seis números

   $$30k + 23,\ 30k + 25,\ 30k + 26,\ 30k + 27,\ 30k + 29,\ 30k + 31$$

   pertenecen a S y son coprimos por parejas.

6. El número a es congruente con uno de los números $24, 25, 26, 27, 28, 29$ módulo 30. Entonces entre $a, a+1, a+2, a+3, a+4, a+5$ hay un número de la forma $30k+29$. En este caso los seis números

$$30k+29,\ 30k+31,\ 30k+32,\ 30k+33,\ 30k+35,\ 30k+37$$

pertenecen a S y son coprimos por parejas.

Solución 2 Sean $A = \{a, a+1, a+2, \ldots, a+13\}$ los 14 números, $I = \{i, i+2, i+4, \ldots, i+12\}$ los impares y $P = \{p, p+2, p+4, \ldots, p+12\}$ los pares. Sea M un conjunto de números, definimos $t(M)$ como el número de múltiplos de 3 en el conjunto y $c(M)$ como el número de múltiplos de 5 que no son múltiplos de 3 en el conjunto. Es claro que $5 \geq t(A) = t(I) + t(P)$ y que $2 \geq c(A) = c(I) + c(P)$, lo último es cierto ya que en principio podría haber 3 múltiplos de 5 en A, pero al ser múltiplos consecutivos de 5, exactamente uno de ellos es múltiplo de 3. Finalmente obtenemos que $7 \geq t(A) + c(A)$.

Primero analicemos I, dos números de entre esos 7, sólo pueden tener factores 3 y 5 en común pues si un primo mayor a 5 dividiera a ambos, dividiría a su diferencia, pero las posibles diferencias son $2, 4, 6, 8, 10$ o 12 y ninguna tiene un factor primo mayor a 5. Es fácil ver que entre 7 impares (pares) consecutivos hay 2 o 3 múltiplos de 3 y 0, 1 o 2 múltiplos de 5 que no son múltiplos de 3. Dividamos en casos con respecto a $t(I) + c(I)$.

- Si $t(I) + c(I) = 5$ se tiene que $t(I) = 3$ y $c(I) = 2$, la única posibilidad para los múltiplos de 3 es que sean $i, i+6$ e $i+12$, y los 2 múltiplos de 5 deben ser i e $i+10$ o $i+2$ e $i+12$, pero en cualquier caso hay un número que es múltiplo de 3 y de 5, lo que implica $t(I)+c(I) \leq 4$, por lo tanto este caso no sucede.
- Si $t(I) + c(I) = 4$ se tiene que $(t(I), c(I))$ es $(3,1)$ o $(2,2)$, en cualquier caso podemos tomar los 3 impares restantes, un múltiplo de 3 no múltiplo de 5 (existe a lo más un múltiplo de 15) y un múltiplo de 5 que no es múltiplo de 3, estos números constituyen un conjunto de 5 impares primos relativos por parejas, ahora veamos que podemos tomar un par, primo relativo con estos 5 números. Como $t(I) + c(I) = 4$ se tiene que $t(P) + c(P) \leq 3$, si a P le quitamos estos números, tenemos al menos 4 elementos, si también quitamos los múltiplos de 7, 11 o 13 habremos quitado a lo más 3 números (pues a lo más hay un múltiplo de cada número en P), por lo que al menos habrá un número par que no tiene factores primos impares menores a 17 y por lo tanto es primo relativo con los 5 impares elegidos previamente, lo que concluye este caso.
- Si $t(I) + c(I) = 3$ se tiene que $(t(I), c(I))$ es $(3,0)$ o $(2,1)$, en cualquier caso podemos tomar los 4 impares restantes y un múltiplo de 3 no múltiplo de 5, estos números constituyen un conjunto de 5 impares primos relativos por parejas, ninguno de ellos múltiplo de 5. Para elegir el par quitemos de P los múltiplos de 3 (a lo más 3 números) y los múltiplos de 7, 11 o 13 (a lo más 3 números) entonces hay al menos un número que no comparte factores primos con los 5 impares, por lo tanto en este caso hemos demostrado que existen los seis números buscados.
- Si $t(I)+c(I) = 2$ se tiene que $t(I) = 2$ y $c(I) = 0$, aquí tomamos los 5 números restantes y el múltiplo de 3 no múltiplo de 5, esos 6 números son primos relativos por parejas.

Solución 3 Sean $A = \{a, a+1, a+2, \ldots, a+13\}$ los 14 números, notemos que números de este conjunto sólo pueden compartir los factores primos $2, 3, 5, 7, 11$ o 13.

Notemos que entre 7 impares (pares) consecutivos siempre podemos quitar alguno de los extremos de tal manera que de los 6 restantes hay exactamente un múltiplo de 5, esto se debe a que entre 7 impares (pares) hay a lo más dos múltiplos de 5 y si hay dos, son el primero y el sexto o el segundo y el séptimo. Al tomar los 6 números impares y quitar al múltiplo de 3 que no es múltiplo de 5, (que siempre existe ya que los dos múltiplos de 3 no pueden ser ambos múltiplos de 15) tendremos 5 números que son primos relativos por parejas ya que son impares, no comparten factores 3 y 5 y no pueden compartir un factor primo mayor, pues si lo hicieran, el primo dividiría a su diferencia, pero las posibles diferencias son $2, 4, 6, 8, 10$ o 12 y ninguna tiene un factor primo mayor a 5.

Ahora veamos que siempre podemos elegir un par que sea primo relativo con los 5 impares elegidos. Tomemos los 6 pares consecutivos tales que entre ellos hay sólo un múltiplo de 5, entre ellos hay a lo más un múltiplo de 13, un múltiplo de 11, un múltiplo de 7, un múltiplo de 5 y dos múltiplos de 3, si ninguno de los 6 números es primo relativo con los 5 impares elegidos, eso implica que entre los 14 números hay dos múltiplos de 13 (deben ser a y $a+13$), dos múltiplos de 11 que no son múltiplos de 13 (deben ser $a+1$ y $a+12$) pero entonces de los 5 pares entre $a+2$ y $a+11$, a lo más uno es múltiplo de 7, uno múltiplo de 5 y dos múltiplos de 3, esto dice que hay un par que no tiene factores primos impares menores a 17, por lo tanto este número es primo relativo con los 5 impares elegidos anteriormente.

6.2. Segundo Día

Problema IV A cada entero positivo se le aplica el siguiente proceso: al número se le resta la suma de sus dígitos, y el resultado se divide entre 9. Por ejemplo, el resultado del proceso aplicado al 938 es 102, ya que $(938 - (9+3+8))/9 = 102$. Aplicando dos veces el proceso a 938 se llega a 11, aplicado 3 veces se llega al 1, y aplicado cuatro veces se llega al 0.

Cuando a un entero positivo n se le aplica el proceso una o varias veces, se termina en 0. Al número al que se llega antes de llegar al 0, lo llamamos la *casa* de n.

¿Cuántos números menores que 26000 tienen la misma casa que 2012?

Solución 1 Notemos que la casa del 2012 es el número 2.

El proceso aplicado a un número $m = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$, se puede calcular de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{9}\left[(a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \cdots + a_1 10 + a_0)\right. \\
&\quad \left.-(a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0)\right] \\
&\qquad = \frac{a_n(\overbrace{99\dots9}^{n \text{ veces}}) + a_{n-1}(\overbrace{99\dots9}^{n-1 \text{ veces}}) + \cdots + a_2(99) + a_1(9)}{9} \\
&\qquad = a_n(\underbrace{11\dots1}_{n \text{ veces}}) + a_{n-1}(\underbrace{11\dots1}_{n-1 \text{ veces}}) + \cdots + a_2(11) + a_1(1).
\end{aligned}$$

Notemos que al aplicar el proceso a un número no importa el dígito de las unidades de tal número por lo que, al aplicar el proceso a 10 números consecutivos (el primero con dígito de las unidades igual a 0 y el último con dígito de las unidades igual a 9) obtenemos el mismo número. En otras palabras, si consideramos un número n y deseamos encontrar todos los números que al aplicarles el proceso nos dan n, si existe uno, entonces hay diez números consecutivos que tienen esa propiedad.

También es importante notar que existen números que no son imagen, bajo el proceso, de algún otro número.

Primera forma de terminar.

Para encontrar todos los números que al aplicarles el proceso tienen como *casa* el número 2, procederemos por casos con respecto al número de dígitos que forman el número. El caso de números de un sólo dígito es trivial, pues sólo el número 2 tiene como *casa* el 2.

- **1er caso, enteros de dos dígitos.** Deseamos encontrar todos los números $\overline{ab}$ tales que

$$\frac{10a + b - a - b}{9} = \frac{9a}{9} = a = 2,$$

entonces claramente $a = 2$ y b puede tomar cualquier valor, de donde todos los números 20, 21, 22, ..., 29 al aplicarles el proceso obtenemos el número 2.

- **2do caso, enteros de tres dígitos.** Para enteros $\overline{abc}$, el proceso nos da $11a+b$, por lo que queremos encontrar las soluciones

de las ecuaciones $11a + b = 20 + m$, donde $m \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Para ello observe que

$$11a = 20 + m \quad b = 0 \mod 11,$$

de donde $m - b = 2 \mod 11$. Por ejemplo, si $m = 0$, entonces $b = 9$ y $a = 1$, de donde al aplicar el proceso a 190, 191, ..., 199 obtenemos el número 20.
Ahora, para $m = 9$, obtenemos que $b = 7$ y luego $a = 2$, de donde al aplicar el proceso a los números 270, 271, ..., 279 obtenemos 29.
Notemos que el intervalo de enteros $[190, 279]$ contiene 90 números y no 100 como era de esperarse, esto se debe al hecho de que cuando $m = 1$ se tiene que $b = 10$, por lo que en este caso no hay solución, es decir no hay números que al aplicarles el proceso nos de 21.

- **3er caso, enteros de cuatro dígitos.** Se tienen que encontrar a, b, c tales que

$$111a + 11b + c = k$$

donde $k = 190, 191, \dots, 279$.
Para $k = 190, 191, \dots, 221$, tenemos que $a = 1$, por lo que la ecuación se reduce a

$$11b + c = 79 + m$$

donde $m \in \{0, 1, \dots 31\}$, y obtenemos soluciones $[1720, 1999]$.
Para $k = 222, 223, \dots, 279$, se tiene qué $a = 2$ y la ecuación se reduce a

$$11b + c = m$$

donde $m = 1, 2, \dots, 57$, por lo que procediendo de la misma manera obtenemos las soluciones $[2000, 2529]$, que en total son $2529 - 1719 = 810$ números.

- **4to caso, enteros de cinco dígitos.** Procediendo como antes, obtenemos las soluciones $[15500, 22789]$, es decir, $22789 - 15499 = 7920$ soluciones más.
Todos los números de 6 dígitos son mayores que 26000 por lo que el número de enteros buscados es

$$1 + 10 + 10 \cdot 9 + 10 \cdot 9^2 + 10 \cdot 9^3 = 8201.$$

Segunda forma de terminar.

Los enteros positivos m, menores que 26000, que no son imagen de algún otro entero bajo el proceso, pueden ser escritos en la forma

$$1111a + 111b + 11c + 10,\ 1111a + 111b + 110 \text{ o } 1111a + 1110$$

donde a, b, c son dígitos.

Para convencernos de lo anterior, notemos que la fórmula obtenida del proceso de un número, está dada en términos de los dígitos del número, por lo que por ejemplo para obtener un número de la forma

$$1111a + 111b + 11c + 10,$$

sería necesario tener un dígito igual a 10, lo cual no es posible.

Como en la primera forma de terminar, es fácil ver que los únicos números de a lo más dos dígitos cuya *casa* es el 2, son $2, 20, 21, \ldots, 29$, es decir, 11 números. Ahora, nos gustaría encontrar todos los números a los cuales al aplicarles el proceso nos dan como resultados $20, 21, \ldots 29$. En principio deberá haber 100 números de los buscados, sin embargo es fácil ver que ningún número llega al 21 al aplicarle el proceso. Por lo tanto, sólo hay 90 números que llegan a $20, 21, \ldots, 29$. Los 90 números que llegan a $20, 21, \ldots, 29$, es el intervalo de enteros $[190, 279]$.

En principio hay 900 números que al aplicarles el proceso pertenecen al intervalo de enteros $[190, 279]$, pero debemos buscar en este intervalo $[190, 279]$, cuales números no tienen preimagen bajo el proceso. Hay 8 números de la forma

$$1111a + 111b + 11c + 10$$

($a = 0, b = 1, c = 7, 8, 9$ y $a = 0, b = 2, c = 0, 1, 2, 3, 4$), y un número de la forma

$$1111a + 111b + 110$$

($a = 0, b = 1$), en el intervalo $[190, 279]$, por lo que estos 9 números no tienen preimagen bajo el proceso. Entonces, sólo existen $900 - 9 \cdot 10 = 810$ números que bajo el proceso llegan al intervalo $[20, 29]$. Como el primer número que llega al 190 es el 1720 y el último número que llega a 279 es el 2529, y $2529 - 1719 = 810$, entonces exactamente el intervalo de enteros $[1720, 2529]$ son los que bajo el proceso llegan al intervalo $[190, 279]$. De la misma manera, debemos buscar cuales números en el intervalo $[1720, 2529]$ no tienen preimagen bajo el proceso. En dicho intervalo hay 72 números de la forma

$$1111a + 111b + 11c + 10,$$

7 de la forma $1111a + 111b + 110$ y 2 de la forma

$$1111a + 1110,$$

en total 81 números. Por lo que la cantidad de enteros que bajo el proceso llegan a $[1710, 2529]$ es $8100 - 81 \cdot 10 = 7290$. Ahora notemos que el proceso aplicado a 15500 es igual a 1791 (1790 no tiene preimagen) y el proceso aplicado a 22789 es 2529, que son $22789 - 15499 = 7290$ números exactamente.

Todos los números de 6 dígitos son mayores que 26000 por lo que el número de enteros buscados es $1+10+10\cdot 9+10\cdot 9^2+10\cdot 9^3 = 8201$.

Solución 2 Sea P la función que representa el proceso que se aplica a cada entero positivo N, es decir, si $N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$ está escrito en su expresión decimal, entonces

$$\begin{aligned} P(N) &= \frac{1}{9}\left[(10^n a_n - a_n) + (10^{n-1} a_{n-1} - a_{n-1}) + \cdots \right. \\ &\qquad \left. + (10a_1 - a_1) + (a_0 - a_0)\right] \\ &= \frac{1}{9}\left[a_n(\underbrace{99\ldots9}_{n \text{ veces}}) + a_{n-1}(\underbrace{99\ldots9}_{n-1 \text{ veces}}) + \cdots + a_2(99) + a_1(9)\right] \\ &= a_n(\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ veces}}) + a_{n-1}(\underbrace{11\ldots1}_{n-1 \text{ veces}}) + \cdots + 11a_2 + a_1 \\ &= \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1} + \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2} + \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_3} + \cdots \\ &\qquad + \overline{a_n a_{n-1}} + a_n \end{aligned}$$

Notemos que si $a \geq b$ entonces $P(a) \geq P(b)$, es decir, P es una función creciente. Además podemos observar que al aplicar P a cualquier número, el dígito de las unidades de tal número no aparece en ninguna de las sumas finales de la definición de P.

Primero calculemos la *casa* de 2012. Usando la expresión obtenida para P, se tiene que $P(2012) = 201+20+2 = 223$, $P(223) = 22+2 = 24$, $P(24) = 2$ y $P(2) = 0$, por lo que la *casa* de 2012 es igual a 2.

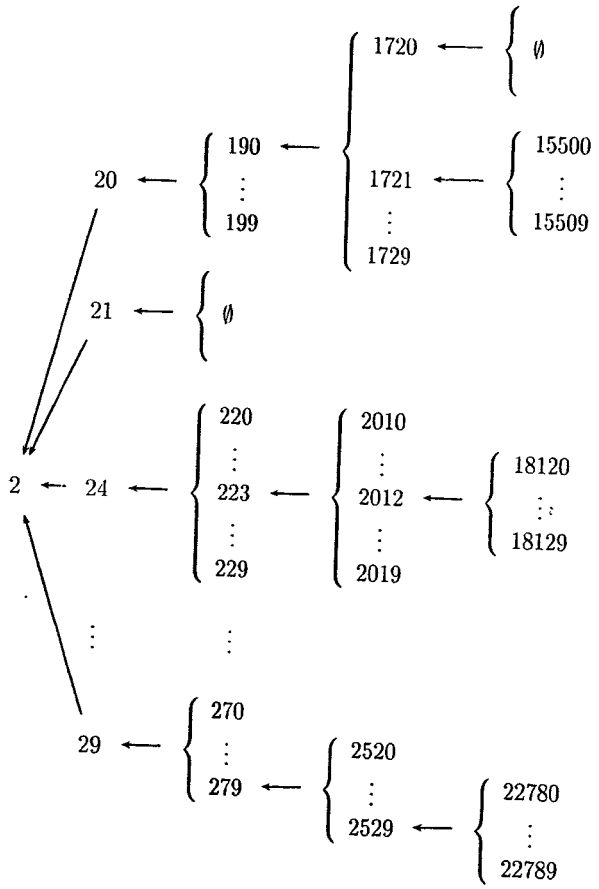
Para obtener todos los números menores que 26000 que tienen como *casa* al número 2, debemos calcular la familia de preimágenes de 2 bajo la función P, es decir, $P^{-n}(2)$ para n entero positivo.

Es claro que el número 2 tiene como casa a él mismo y es el único dígito que tiene como casa al 2. Ahora, encontremos los números de dos dígitos $\overline{ab}$ tales que $P(\overline{ab}) = 2$, es decir, necesitamos resolver la ecuación $P(\overline{ab}) = a = 2$. De donde, $a = 2$ y b puede ser cualquier dígito, por lo tanto todos los números $20, 21, \ldots, 29$ tienen como *casa* al número 2.

Para tres dígitos, tenemos que $P(\overline{abc}) = \overline{ab} + a = n$, donde n toma valores del 20 al 29. Es fácil ver que $P(190) = 20$ y $P(279) = 29$. Notemos además que $P(189) = 18 + 1 = 19$ y que $P(280) = 28 + 2 = 30$, luego como P es creciente no existen enteros diferentes de $[190, 279]$ cuya imagen está contenida en $[20, 29]$.

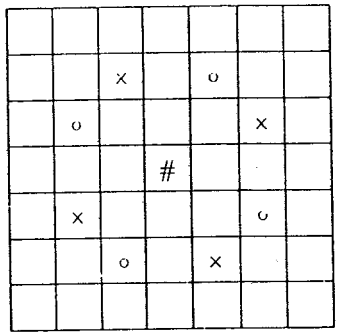
Para cuatro dígitos procedemos de la misma forma, para obtener que el intervalo de enteros $[1720, 2529]$ bajo P está contenido en el intervalo $[190, 279]$, es decir, hay 810 números más de los buscados. Finalmente para números de cinco dígitos tenemos que el intervalo de enteros $[15500, 22789]$ bajo P está contenido en el intervalo $[1720, 2529]$, es decir, hay 7290 números. Cabe notar que en este caso, el número 1720 no tiene preimágenes bajo P. Notemos que las preimágenes del intervalo $[15500, 22789]$ son números mayores que 26000. Por lo tanto el número de enteros buscados es

$$1 + 10 + 90 + 810 + 7290 = 8201.$$



Problema V Algunas ranas, unas de ellas rojas y otras verdes, se van a mover en un tablero 11×11, de acuerdo a las siguientes reglas. Si una rana está ubicada, digamos, en la casilla marcada con # en la siguiente figura, entonces

- Si es roja, puede saltar a cualquiera de las casillas marcadas con $\times$.
- Si es verde, puede saltar a cualquiera de las casillas marcadas con $\circ$.



Diremos que dos ranas (de cualquier color) *se pueden encontrar en una casilla* si ambas pueden llegar hasta tal casilla saltando una o más veces, no necesariamente con el mismo número de saltos.

(a) Muestra que si ponemos 6 ranas, entonces hay al menos 2 que se pueden encontrar en una casilla.

(b) ¿Para qué valores de k es posible poner una rana roja y una verde de manera que haya exactamente k casillas en las que estas dos ranas se pueden encontrar?

Solución 1 Primero vamos a explorar un poco cómo se comportan las ranas rojas. Con las ranas verdes pasan cosas similares. Por comodidad trabajaremos con un tablero más grande. Pintemos el tablero con la siguiente coloración.

					⋮						
	1	4	2	5	3	1	4	2	5	3	
	2	5	3	1	4	2	5	3	1	4	
	3	1	4	2	5	3	1	4	2	5	
	4	2	5	3	1	4	2	5	3	1	
⋯	5	3	1	4	2	5	3	1	4	2	⋯
	1	4	2	5	3	1	4	2	5	3	
	2	5	3	1	4	2	5	3	1	4	
	3	1	4	2	5	3	1	4	2	5	
	4	2	5	3	1	4	2	5	3	1	
	5	3	1	4	2	5	3	1	4	2	
					⋮						

Notemos que una rana roja que comienza en determinado número puede visitar todas las casillas con este número y sólo esas. Notemos también que una rana puede visitar cualquier columna.

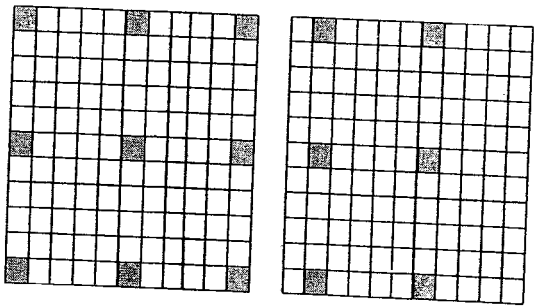
Ahora veremos cómo interactúan las ranas rojas con las ranas verdes. Para esto haremos saltar una rana verde en el tablero anterior.

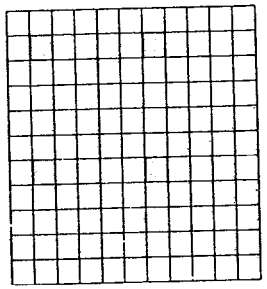
Notemos que en cada columna y en cada fila visita uno y sólo un tipo de números. Más aún, en 5 filas (o columnas) consecutivas, visita números distintos. Esto nos garantiza que poniendo cualesquiera dos ranas de colores distintos, se pueden encontrar una y sólo una vez en cada tablero de 5×5.

					⋮						
	①	4	2	5	3	①	4	2	5	3	
	2	5	③	1	4	2	5	③	1	4	
	3	1	4	2	⑤	3	1	4	2	⑤	
	4	②	5	3	1	4	②	5	3	1	
⋯	5	3	1	④	2	5	3	1	④	2	⋯
	①	4	2	5	3	①	4	2	5	3	
	2	5	③	1	4	2	5	③	1	4	
	3	1	4	2	⑤	3	1	4	2	⑤	
	4	②	5	3	1	4	②	5	3	1	
	5	3	1	④	2	5	3	1	④	2	
					⋮						

Ahora sí, resolvamos el problema. Para la **parte (a)**, tenemos dos posibilidades: que haya ranas de distintos colores o que todas sean del mismo color. Si tenemos ranas de los dos colores, entonces se encuentran en cada tablero de 5×5. Si todas son del mismo color (sin pérdida de generalidad, rojas), entonces vemos a qué número corresponden según la primer coloración. Por principio de casillas hay dos ranas que caen en el mismo número y por tanto estas dos ranas se pueden encontrar.

La **parte (b)** se obtiene a partir de que en cada tablero de 5×5 hay exactamente un punto en el que se puedan encontrar ranas de colores distintos. Tenemos 3 posibilidades según quede el desfase en el tablero de 11×11 con respecto al tablero grande:





Es decir, puede que haya 2 o 3 filas en las que se encuentran y 2 o 3 columnas en las que se encuentran, dando 4, 6 o 9 posibles casillas de encuentro.

Solución 2 Otra forma de demostrar la **parte (a)** es mostrar que cualquier rana (sin importar su tipo), puede visitar alguna de las primeras 5 casillas de la primera fila. Esto se puede probar algoritmicamente, viendo que en cada salto la rana sube 2 o 3 filas y baja 2 o 3 filas (y lo mismo para las columnas).

Así, de nuevo aplicando el principio de las casillas tenemos que de seis ranas, dos de ellas pueden encontrarse en alguna de estas casillas marcadas.

Solución 3 De nuevo probamos la **parte (a)**. Primero observamos que, para cualquier rana, si esta puede visitar una casilla de una columna, entonces en esa misma columna sólo puede visitar aquellas que están a distancia múltiplo de 5.

Como una rana puede visitar cualquier columna, entonces al tener 6 ranas, las mandamos todas a una misma columna y dos de ellas deben de quedar a distancia múltiplo de 5.

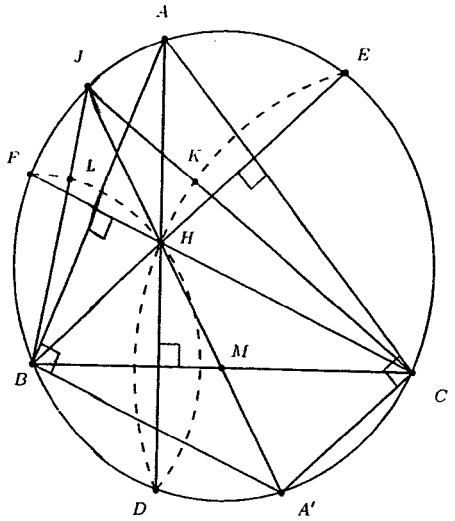
Observación. Consideremos la segunda figura de la solución 1. Si en esta figura recortamos un tablero de 9×9 con centro en el número 1 que está dentro del círculo, vemos que dos ranas de distinto color que comienzan en el centro de un tablero de 9×9 sólo se pueden encontrar en esa casilla.

Una segunda forma de argumentar la **parte (b)** es ver dónde queda este tablero de 9×9 en el tablero de 11×11.

Problema VI Considera un triángulo acutángulo $\triangle ABC$ con circuncírculo $\mathcal{C}$. Sean H el ortocentro de $\triangle ABC$ y M el punto medio de BC. Las rectas AH, BH y CH cortan por segunda vez a $\mathcal{C}$ en D, E y F, respectivamente; la recta MH corta a $\mathcal{C}$ en J de manera que H queda entre M y J. Sean K y L los incentros de $\triangle DEJ$ y $\triangle DFJ$, respectivamente. Muestra que KL es paralela a BC.

Solución 1 Sea A' el punto diametralmente opuesto a A en $\mathcal{C}$. Notemos que BH es paralelo a $A'C$ pues ambas rectas son perpendiculares a AC; CH es paralela a $A'B$ porque las dos son perpendiculares a AB. Entonces $A'BHC$ es un paralelogramo, y como en los para-

lelogramos las diagonales se intersecan en su punto medio, $A'H$ interseca a BC en M. Se sigue que A', M, H y J están alineados.



Ahora demostraremos que D es la reflexión de H con respecto a a BC. El cuadrilátero $ABDC$ es cíclico entonces se tienen las siguientes igualdades

$$\measuredangle BCD = \measuredangle BAD = 90° - \measuredangle B = \measuredangle BCH.$$

De manera similar se sigue que $\measuredangle CBD = \measuredangle CBH$. Por criterio ALA, los triángulos BHC y BDC son congruentes, lo cual prueba que D es la reflexión de H con respecto a BC. Análogamente, E y F son las reflexiones de H con respecto a CA y AB, respectivamente. De lo anterior podemos concluir que $CD = CH = CE$, de modo que los arcos menores $\overset{\frown}{CD}$ y $\overset{\frown}{CE}$ son iguales y por tanto JC es bisectriz de $\measuredangle DJE$. Más aún, es conocido que C es el circuncentro de $\triangle CHK$, así que $CK = CH$. Por otra parte, como $A'BHC$ es paralelogramo, $CH = BA'$, de donde $CK = BA'$. Siguiendo un razonamiento similar con $\triangle DFJ$ se concluye que $BL = CA'$.

Para terminar, $\triangle JBM$ es semejante a $\triangle CA'M$ y $\triangle JCM$ es semejante a $\triangle BA'M$. De esto obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{JB}{CA'} &= \frac{BM}{A'M}, \\ \frac{JC}{BA'} &= \frac{CM}{A'M}. \end{aligned}$$

Empleando las expresiones anteriores se llega a que

$$\frac{JC}{JB} = \frac{BA' \cdot CM}{A'M} \cdot \frac{A'M}{CA' \cdot BM} = \frac{BA'}{CA'} = \frac{CK}{BL},$$

así que por el Teorema de Thales, LK y BC son paralelas, como se quería probar.

Observación. Hay varias maneras de concluir, como por ejemplo la siguiente. Las rectas BC y $A'D$ son paralelas pues ambas son perpendiculares a AD. Entonces tenemos

$$\measuredangle BJD = \measuredangle BCD = \measuredangle CDA' = \measuredangle CJA'.$$

De lo anterior se sigue fácilmente que $\triangle JBD$ y $\triangle JMC$ son semejantes, así como $\triangle JCD$ y $\triangle JMB$, por lo tanto

$$\frac{JB}{BD} = \frac{JM}{MC} = \frac{JM}{MB} = \frac{JC}{CD}.$$

Reacomodando la expresión anterior llegamos a

$$\frac{JC}{JB} = \frac{CD}{BD} = \frac{CK}{BL},$$

en consecuencia KL es paralela a BC.

Solución 2 Iniciemos demostrando el siguiente lema.

Lema 2 *Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico convexo. Si los puntos P, Q, R y S son los incentros de los triángulos $\triangle BCD$, $\triangle CDA$, $\triangle DAB$ y $\triangle ABC$, respectivamente, entonces $PQRS$ es un rectángulo.*

Demostración. Sea X un punto sobre el rayo DQ de manera que Q está entre D y X. Por ser R y Q los incentros de los triángulos $\triangle DAB$ y $\triangle CDA$, respectivamente, tenemos que

$$\begin{aligned} \measuredangle ARD &= 90° + \frac{1}{2}\measuredangle ABD, \\ \measuredangle AQD &= 90° + \frac{1}{2}\measuredangle ACD, \end{aligned}$$

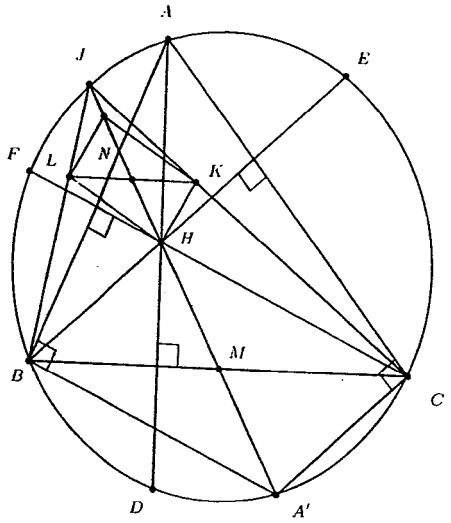
pero por ser $ABCD$ cíclico se tiene que $\measuredangle ABD = \measuredangle ACD$, por lo tanto, $\measuredangle ARD = \measuredangle AQD$; entonces $ARQD$ es cíclico. De manera análoga, $DQPC$ es cíclico. De lo anterior se sigue que

$$\begin{aligned} \measuredangle PQR &= \measuredangle PQX + \measuredangle XQR \\ &= \measuredangle PCD + \measuredangle DAR \\ &= \frac{1}{2}(\measuredangle BCD + \measuredangle DAB) \\ &= 90°. \end{aligned}$$

De manera similar se demuestra que los demás ángulos de $PQRS$ son rectos, por lo que $PQRS$ es rectángulo y el lema queda probado.

■

Retomando el problema original, consideremos A' el punto diametralmente opuesto a A en C y N el incentro de $\triangle FJE$. Como se probó en la solución 1, los puntos H, M y A' son colineales, luego A' está sobre JM, que es mediana de $\triangle JBC$.



Recordemos que en la solución 1 también se demostró que $\overset{\frown}{FB} = \overset{\frown}{BD}$ y $\overset{\frown}{DC} = \overset{\frown}{CE}$. Se sigue entonces que BJ, BE, CF y CJ son bisectrices de $\measuredangle FJD$, $\measuredangle FED$, $\measuredangle DFE$ y $\measuredangle DJE$, respectivamente. Entonces K está sobre JC, L está sobre JB y H es el incentro de $\triangle DEF$. Como A es el punto medio del arco $\overset{\frown}{FE}$ y A' es el punto diametralmente opuesto a A en C, se tiene que A' es el punto medio del arco $\overset{\frown}{EF}$, en consecuencia N está sobre JM.

Por otro lado, el lema aplicado a $FJED$ nos garantiza que $NLHK$ es un rectángulo, en particular sus diagonales se bisecan y entonces la recta JM corta al segmento KL en su punto medio, al cual denotaremos P. Si L' es un punto sobre JC de manera que KL' es paralela a BC y P' es el punto de intersección de JM con KL', por el Teorema de Thales se tiene que P' es el punto medio de KL'. Entonces podemos asegurar que

$$\frac{KP}{PL} = \frac{KP'}{P'L'},$$

por lo tanto PP' y LL' son paralelas, sin embargo estas rectas se cortan en A, así que la única posibilidad es que $L = L'$, lo cual concluye la demostración.

Capítulo 7

Definiciones y Resultados Básicos

7.1. Geometría

7.1.1. Ángulos

Definición 1 *Un **ángulo** es la abertura formada por dos semirrectas con un mismo origen llamado vértice.*

*Un **ángulo recto** es aquel que mide* $90°$.

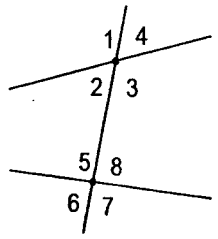
*Dos ángulos son **complementarios**, y cada uno es el complemento del otro, cuando su suma es igual a* $90°$.

*Dos ángulos son **suplementarios**, y cada uno es el suplemento del otro, cuando su suma es igual a* $180°$.

*Dos ángulos son **opuestos por el vértice** cuando los lados de uno son las prolongaciones de los del otro.*

*Dos ángulos son **adyacentes** cuando tienen un mismo vértice y un lado común y son exteriores el uno al otro.*

Cuando una recta se interseca con otra diferente se forman dos parejas de ángulos opuestos iguales. En un sistema de dos rectas cortadas por una secante o transversal se pueden clasificar los ángulos de acuerdo a la posición que ocupan con respecto a los sistemas adyacentes.



Correspondientes
1, 5
2, 6
3, 7
4, 8

Alternos	Colaterales	
2, 8	2, 5	Internos
3, 5	3, 8	
1, 7	1, 6	Externos
4, 6	4, 7	

Dos rectas se encuentran en el mismo plano son **paralelas** si no se cortan.

Teorema 1 *En todo sistema de dos rectas paralelas cortadas por una secante, se tiene que*

1. *los ángulos correspondientes son iguales,*
2. *los ángulos alternos son iguales,*
3. *los ángulos colaterales son suplementarios.*

Definición 2 *Un triángulo que tiene sus tres ángulos interiores agudos, es decir menores de 90°, se llama* ***acutángulo.***

Un ***triángulo rectángulo*** *es aquel que tiene un ángulo interior recto, es decir de 90°.*

Un triángulo que tiene un ángulo obtuso, es decir mayo de 90° se llama ***obtusángulo.***

Un triángulo que tiene dos de sus lados iguales se llama ***isósceles.***

Un triángulo que tiene sus tres lados iguales se llama ***equilátero.*** *Un triángulo equilátero es un caso particular de un triángulo isósceles.*

Un triánguio que no tiene ningún par de lados iguales se llama ***escaleno.***

Corolario 2 *La suma de los tres ángulos interiores de cualquier triángulo es igual a 180°.*

Definición 3 *Un* ***ángulo exterior*** *de un triángulo es el formado por un lado del triángulo y la prolongación de otro.*

Corolario 3 *En todo triángulo cada ángulo exterior es igual a la suma de los dos interiores que no le son adyacentes, es decir los que le son opuestos.*

La suma de los tres ángulos exteriores (uno en cada vértice) de cualquier triángulo, es igual a 360°.

7.1.2. Semejanza de Triángulos

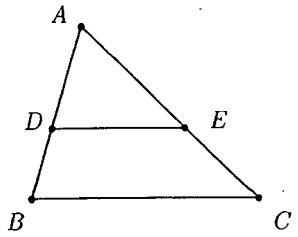
El área de un triángulo $\triangle ABC$ está determinada por las medidas de su base y altura

$$(\triangle ABC) = \frac{\text{Base} \cdot \text{Altura}}{2}.$$

Proposición 1 *Si dos triángulos tienen un par de bases iguales, entonces la razón entre sus áreas es igual a la razón entre las alturas correspondientes.*

Proposición 2 *Si dos triángulos tienen un par de alturas iguales, entonces la razón entre sus áreas es igual a la razón entre las bases correspondientes.*

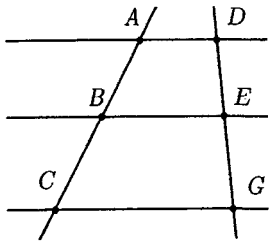
Teorema 4 (Primer Teorema de Thales) *Si una recta paralela a uno de los lados de un triángulo corta a los otros lados, entonces los segmentos formados son proporcionales.*



Lo que nos dice este resultado es que para un triángulo cualquiera $\triangle ABC$, si D y E son puntos en AB y AC respectivamente, tales que DE es paralelo a BC, entonces

$$\begin{aligned}\frac{AD}{AB} &= \frac{AE}{AC},\\ \frac{AD}{DB} &= \frac{AE}{EC},\\ \frac{AB}{DB} &= \frac{AC}{EC}.\end{aligned}$$

Teorema 5 (Segundo Teorema de Thales) *Si tres o más paralelas son cortadas por cualesquiera dos transversales, entonces los respectivos segmentos que las paralelas determinan en estas últimas rectas son proporcionales.*

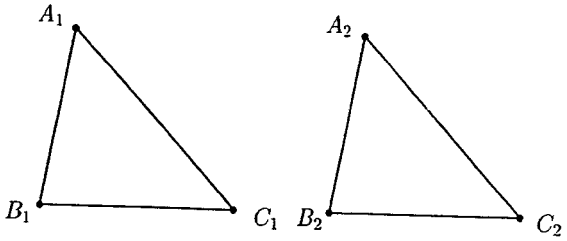


En este caso, si AD, BE y CG son paralelas, entonces

$$\begin{aligned}\frac{AB}{AC} &= \frac{DE}{DG},\\ \frac{AB}{BC} &= \frac{DE}{EG},\\ \frac{AC}{BC} &= \frac{DG}{EG}.\end{aligned}$$

Definición 4 *Dos triángulos $\triangle A_1B_1C_1$ y $\triangle A_2B_2C_2$ se llaman* ***congruentes o iguales*** *si y sólo si tanto sus lados como sus ángulos correspondientes son iguales, es decir*

$$\begin{aligned} A_1B_1 &= A_2B_2, \\ B_1C_1 &= B_2C_2, \\ A_1C_1 &= A_2C_2, \\ \measuredangle A_1 &= \measuredangle A_2, \\ \measuredangle B_1 &= \measuredangle B_2, \\ \measuredangle C_1 &= \measuredangle C_2. \end{aligned}$$



Para indicar que los triángulos $\triangle A_1B_1C_1$ y $\triangle A_2B_2C_2$ son congruentes lo haremos de la siguiente manera

$$\triangle A_1B_1C_1 \simeq \triangle A_2B_2C_2.$$

Criterios de Congruencia

Para que $\triangle A_1B_1C_1 \simeq \triangle A_2B_2C_2$ es suficiente que se cumpla una de las siguientes tres condiciones

(ALA) Dos ángulos iguales e igual la pareja de lados comprendidos entre los ángulos, por ejemplo

$$\measuredangle A_1 = \measuredangle A_2, A_1B_1 = A_2B_2 \text{ y } \measuredangle B_1 = \measuredangle B_2.$$

(LAL) Dos parejas de lados iguales e igual el ángulo comprendido entre ellos, por ejemplo

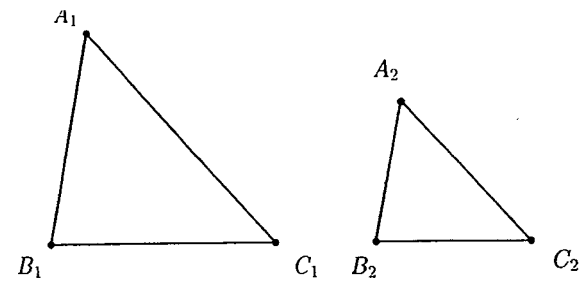
$$A_1B_1 = A_2B_2, \measuredangle B_1 = \measuredangle B_2 \text{ y } B_1C_1 = B_2C_2.$$

(LLL) Las tres parejas de lados iguales

$$A_1B_1 = A_2B_2, B_1C_1 = B_2C_2 \text{ y } A_1C_1 = A_2C_2.$$

Definición 5 *Dos triángulos $\triangle A_1B_1C_1$ y $\triangle A_2B_2C_2$ son* ***semejantes*** *si y sólo si los ángulos correspondientes son iguales y los lados correspondientes son proporcionales, es decir si cumplen las siguientes relaciones*

$$\begin{aligned} \measuredangle A_1 &= \measuredangle A_2, \\ \measuredangle B_1 &= \measuredangle B_2, \\ \measuredangle C_1 &= \measuredangle C_2, \\ \frac{A_1B_1}{A_2B_2} &= \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{A_1C_1}{A_2C_2}. \end{aligned}$$



Para indicar que los triángulos $\triangle A_1B_1C_1$ y $\triangle A_2B_2C_2$ son semejantes lo haremos de la siguiente manera

$$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2.$$

Criterios de Semejanza

Para que $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$ es suficiente que se cumpla una de las tres condiciones siguientes

(AA) Dos ángulos iguales, por ejemplo

$$\measuredangle A_1 = \measuredangle A_2 \text{ y } \measuredangle B_1 = \measuredangle B_2.$$

(LAL) Dos parejas de lados proporcionales e igual el ángulo comprendido entre ellos, por ejemplo

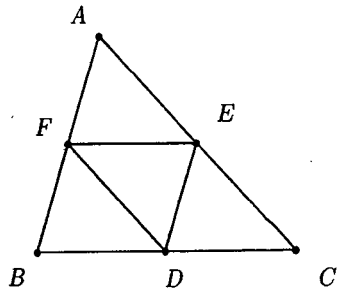
$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} \text{ y } \measuredangle B_1 = \measuredangle B_2.$$

(LLL) Las tres parejas de lados proporcionales

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{A_1C_1}{A_2C_2}.$$

Proposición 3 *El segmento que une los puntos medios de cualesquiera dos lados de un triángulo arbitrario mide la mitad del tercer lado y es paralelo a dicho lado.*

Definición 6 *El triángulo formado por los puntos medios de los lados de un triángulo dado se llama el* ***triángulo medial.***



Corolario 6 *El triángulo medial de cualquier triángulo es siempre semejante a éste y su área es una cuarta parte del área del triángulo original.*

Proposición 4 *La altura trazada desde el vértice correspondiente al ángulo recto en un triángulo rectángulo, divide a éste en dos triángulos semejantes al original.*

Teorema 7 (de Pitágoras) *En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. Es decir, si $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo con ángulo recto en A, entonces*

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

7.1.3. Paralelogramos

Definición 7 *Un **paralelogramo** es un cuadrilátero en el que cada lado es paralelo a su opuesto.*

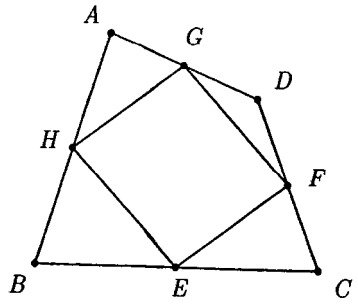
Proposición 5 *Para todo paralelogramo se cumplen las siguientes afirmaciones*

1. *Los lados opuestos son iguales.*
2. *Los ángulos opuestos son iguales y los ángulos consecutivos son suplementarios.*
3. *Las diagonales se cortan en su punto medio.*

Teorema 8 (Ley del Paralelogramo) *La suma de los cuadrados de los cuatro lados de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de las diagonales. Es decir, si $ABCD$ es un paralelogramo, entonces*

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2.$$

Teorema 9 (de Varignon) *Los puntos medios de los lados de un cuadrilátero no cruzado determinan un paralelogramo. El perímetro del paralelogramo es igual a la suma de las longitudes de las diagonales. Y su área es igual a la mitad del área del cuadrilátero.*



7.1.4. Puntos y Rectas en los Triángulos

Definición 8 *Una **mediana** en un triángulo es un segmento trazado del punto medio de un lado al vértice opuesto.*

*Una **altura** en un triángulo es un segmento perpendicular a un lado o a su prolongación que va al vértice opuesto.*

*La **bisectriz** de un ángulo es la recta que lo divide en dos ángulos iguales. En particular una bisectriz en un triángulo es una línea que sale de un vértice y divide al ángulo interior en dos partes iguales.*

*La **mediatriz** de un segmento es la recta que pasa por el punto medio y es perpendicular a dicho segmento. En particular una mediatriz en un triángulo es una línea que pasa por el punto medio de un lado y es perpendicular a él.*

Proposición 6 *En un triángulo isósceles una misma línea hace todos las funciones de mediana, altura, mediatriz y bisectriz, correspondientes al ángulo formado por los lados iguales.*

Teorema 10 (de la Bisectriz) *La bisectriz de cualquier ángulo interior de un triángulo determina, en el lado opuesto, dos segmentos proporcionales a los respectivos lados que forman el ángulo considerado. Es decir, si en $\triangle ABC$ la bisectriz del ángulo $\measuredangle BAC$ corta a BC en un punto P interior del segmento, entonces*

$$\frac{BP}{PC} = \frac{AB}{AC}.$$

Teorema 11 (de la Bisectriz Exterior) *Si la bisectriz de un ángulo exterior de un triángulo interseca al lado opuesto al ángulo, determinará dos segmentos proporcionales a los respectivos lados que forman el ángulo considerado. Es decir, si en $\triangle ABC$ la bisectriz del ángulo $\measuredangle BAC$ corta a BC en un punto P en la extensión del segmento, entonces*

$$\frac{BP}{PC} = \frac{AB}{AC}.$$

Teorema de la bisectriz exterior

Teorema 12 *Si un triángulo es isósceles entonces tiene dos ángulos iguales, los ángulos opuestos a los lados iguales.*

Teorema 13 (de Lehmus-Steiner) *Si un triángulo tiene dos ángulos interiores diferentes, entonces las bisectrices correspondientes son diferentes y al ángulo menor le corresponde la bisectriz mayor.*

En consecuencia si en un triángulo dos de las bisectrices son iguales, entonces sus ángulos correspondientes son iguales, en particular el triángulo es isósceles.

Teorema 14 *Si en un triángulo una misma línea hace a la vez dos de las funciones de*

- *mediatriz,*
- *altura,*
- *bisectriz,*
- *mediana,*

relativas a un mismo lado, entonces el triángulo es isósceles, siendo su base dicho lado, y además la línea hace las otras dos funciones.

Definición 9 ***La distancia de un punto a una recta*** *es la magnitud del segmento determinado por el punto y el pie del punto en la recta.*

Proposición 7 *El lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de cada lado de un ángulo fijo es la bisectriz del ángulo.*

Proposición 8 *El lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de dos puntos fijos distintos pertenecientes al mismo plano, es la mediatriz del segmento determinado por estos puntos.*

Definición 10 *Cuando un conjunto de rectas se intersecan en un solo punto decimos que son* ***concurrentes.***

Teorema 15 *Para un triángulo cualquiera se cumplen las siguientes afirmaciones.*

- *Las tres medianas son concurrentes.*
- *Las bisectrices de los tres ángulos interiores son concurrentes.*
- *Las tres mediatrices son concurrentes.*
- *Las tres alturas son concurrentes.*

Definición 11 *Al punto de intersección G de las tres medianas de un triángulo $\triangle ABC$ le llamaremos* ***gravicentro.*** *Este punto también es conocido como* ***centroide, baricentro o centro de gravedad.***

Al punto I en donde concurren las tres bisectrices de un triángulo $\triangle ABC$ le llamaremos ***incentro,*** *que es el centro de la circunferencia tangente interiormente a cada uno de los lados de $\triangle ABC$, dicha circunferencia se llama el* ***incírculo*** *de $\triangle ABC$ y el radio de dicha circunferencia se llama el* ***inradio.***

El punto O en donde se intersecan las mediatrices de un triángulo $\triangle ABC$ le llamaremos ***circuncentro,*** *que es el centro de la circunferencia que pasa por los tres vértices de $\triangle ABC$, dicha circunferencia se llama el* ***circuncírculo*** *de $\triangle ABC$ y el radio de dicha circunferencia se llama el* ***circunradio.***

El punto H en donde concurren las tres alturas de un triángulo $\triangle ABC$ le llamaremos ***ortocentro.***

Proposición 9 *En un triángulo cualquiera las bisectrices de dos ángulos exteriores y la del tercero interior, son concurrentes.*

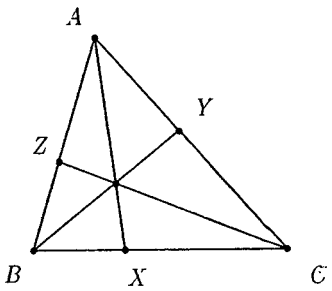
Teorema 16 (Fórmula de Herón) *El el área de un triángulo $\triangle ABC$ en términos de la longitud de sus lados $a = BC$, $b = AC$ y $c = AB$ está dada por*

$$(\triangle ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

en donde $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ es el semiperímetro de $\triangle ABC$.

Teorema 17 (de Ceva) *Sean X, Y y Z puntos en los lados BC, CA y AB de un triángulo $\triangle ABC$, de modo que ninguno de estos puntos coincide con algún vértice del triángulo. Las cevianas AX, BY y CZ son concurrentes si y sólo si*

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1.$$



Definición 12 *Dados dos puntos A y B le podemos asignar un sentido al segmento determinado por ellos, por ejemplo de A a B o viceversa, decimos entonces que el segmento $\overline{AB}$ es un* ***segmento dirigido,*** *que va del extremo A al extremo B. El mismo segmento recorrido del extremo B al extremo A será el segmento dirigido $\overline{BA}$ y la relación entre estos dos está determinada por la ecuación*

$$\overline{AB} = -\overline{BA},$$

o en otras palabras

$$\overline{AB} + \overline{BA} = 0.$$

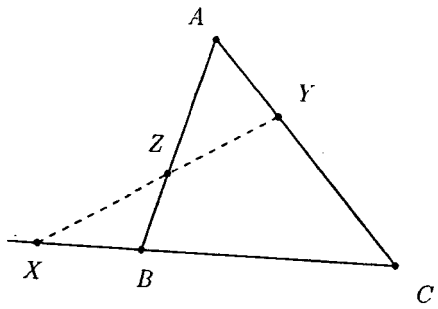
De forma general el comportamiento de segmentos dirigidos estará regido por la ***Relación de Chasles,*** *la cual establece que*

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC},$$

para cualquier posición de tres puntos A, B y C en una recta.

Teorema 18 (de Menelao) *Sean X, Y y Z puntos en los lados BC, CA y AB de un triángulo $\triangle ABC$, de modo que ninguno de estos puntos coincide con algún vértice del triángulo. Los puntos X, Y y Z son colineales si y sólo si*

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = -1.$$



7.1.5. Ángulos en las Circunferencias

Definición 13 *Un* ***ángulo central*** *es el formado por dos radios en una circunferencia. Por lo tanto, dados dos puntos A y B en una circunferencia, el ángulo central $\angle AOB$ es el que tiene su vértice en el centro O de la circunferencia y sus lados son los radios OA y OB.*

El arco correspondiente es el que se encuentra entre los lados del ángulo central $\widehat{AB} = \angle AOB$.

Todo ángulo central mide la medida angular del arco que abraza.

Un ***ángulo inscrito*** *es el formado por dos cuerdas que tienen un extremo en común. Por lo tanto dados tres puntos A, B y P en una circunferencia, el ángulo inscrito $\angle APB$ es el ángulo que tiene su vértice P en la circunferencia y sus lados PA y PB son secantes.*

Todo ángulo inscrito mide la mitad del arco que abraza.

Proposición 10 *Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia, subtendido por el diámetro, es recto.*

Dos ángulos inscritos en una misma circunferencia y que abracen una misma cuerda, son iguales si sus vértices están del mismo lado de la cuerda; y son suplementarios si sus vértices están en lados opuestos respecto de la cuerda.

Definición 14 *Un* ***ángulo semi-inscrito*** *está formado por una cuerda y una tangente que se intersecan en el punto de tangencia. De esta manera, un ángulo semi-inscrito es aquel que tiene su vértice en la circunferencia, uno de sus lados es tangente y el otro secante.*

Proposición 11 *La medida del ángulo semi-inscrito es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados.*

Proposición 12 *Si dos rectas paralelas intersecan a una circunferencia, entonces los arcos determinados entre ellas son iguales.*

Definición 15 *Un* ***ángulo exterior*** *es el formado por dos rectas secantes, o por una secante y una tangente, o por dos tangentes que se intersecan en un punto exterior a una circunferencia y que cortan a la circunferencia en 4, 3 o 2 puntos respectivamente.*

Proposición 13 *Todo ángulo exterior a una circunferencia mide la semidiferencia de los arcos comprendidos entre sus lados.*

Definición 16 *Un* ***ángulo interior*** *en una circunferencia es el formado por dos cuerdas de la circunferencia que se cortan en un punto interior.*

Proposición 14 *Un ánguio interior en una circunferencia mide la semisuma de las medidas de los arcos comprendidos por sus lados y por sus prolongaciones.*

7.1.6. Cuadriláteros Cíclicos

Definición 17 *Diremos que un conjunto de puntos es* ***concíclico*** *si todos los puntos del conjunto se encuentran en una misma circunferencia.*

Teorema 19 (Conciclicidad de Cuatro Puntos) *Sean A, B, P y Q cuatros puntos en el plano, cada tres de ellos no colineales. Si los puntos P y Q están en un mismo semiplano determinado por la recta AB y desde ellos se ve el segmento AB bajo ángulos iguales, o bien si los puntos P y Q están en distintos semiplanos determinados por la recta AB y desde ellos se ve el segmento AB bajo ángulos suplementarios; entonces los puntos A, B, P y Q son concíclicos.*

Definición 18 *Se dice que un polígono es* ***cíclico*** *o* ***inscriptible****, si sus vértices son concíclicos.*

Un cuadrilátero convexo es cíclico si y sólo si sus ángulos opuestos son suplementarios. O bien, un cuadrilátero convexo es cíclico si y sólo si desde un par de vértices adyacentes se ve el lado opuesto bajo ángulos iguales.

Teorema 20 (de Ptolomeo) *Un cuadrilátero convexo es cíclico si y sólo si la suma de los productos de los lados opuestos es igual al producto de las diagonales.*

Proposición 15 *Dado un triángulo $\triangle ABC$ cualquiera, si H es su ortocentro, O su circuncentro y A' el punto medio del lado BC, entonces*

$$AH = 2A'O.$$

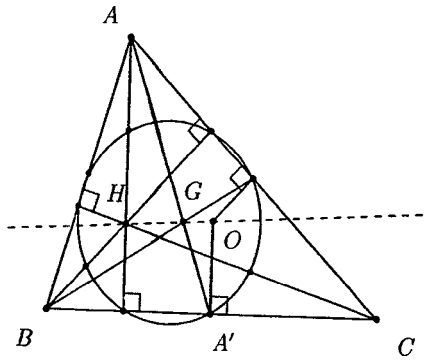
Teorema 21 *El ortocentro, gravicentro y circuncentro de un triángulo son colineales. La distancia del ortocentro al gravicentro mide el doble que la distancia del gravicentro al circuncentro.*

Definición 19 *La recta que pasa por el ortocentro, gravicentro y circuncentro de un triángulo se llama la* ***recta de Euler*** *del triángulo en cuestión.*

Corolario 22 *El circuncentro del triángulo medial de un triángulo $\triangle ABC$ se encuentra en el punto medio del segmento HO de la recta de Euler de $\triangle ABC$.*

Teorema 23 *Los pies de las tres alturas de un triángulo, los puntos medios de los tres lados y los puntos medios de los segmentos que van de los vértices al ortocentro están en una circunferencia cuyo centro está en el punto medio del segmento HO de la recta de Euler.*

Esta circunferencia se llama la ***Circunferencia de los Nueve Puntos*** *de un triángulo. El centro de esta circunferencia se encuentra en la recta de Euler, a la mitad entre el ortocentro y el circuncentro.*



7.1.7. Potencia

Proposición 16 *Sean A, B, C y D cuatro puntos concíclicos. Si P es el punto de intersección de las rectas AB y CD, entonces*

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

Definición 20 *Dado un punto P cualquiera y una recta que pase por el punto y corte a una circunferencia en los puntos X y Y, la* ***potencia*** *del punto P con respecto a la circunferencia dada es igual a $PX \cdot PY$.*

Teorema 24 *Dados un punto P y una circunferencia de centro O y radio R, una secante desde el punto P que corta a la circunferencia en puntos A y B es tal que $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$ es constante e igual a*

$$\overline{PO}^2 - R^2.$$

Más aun, si P es un punto exterior de la circunferencia entonces

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PT}^2,$$

en donde PT es una de las tangentes al círculo, que pasa por P.

Teorema 25 *Si los lados opuestos AB y CD de un cuadrilátero se intersecan en un punto P y se cumple que $PA \cdot PB = PC \cdot PD$, entonces el cuadrilátero es cíclico.*

Definición 21 *El* ***eje radical*** *de dos circunferencias es el lugar geométrico de los puntos tales que tienen la misma potencia respecto a las circunferencias dadas.*

Teorema 26 *Los ejes radicales de tres circunferencias con centros no colineales tomados por pares son concurrentes.*

Definición 22 *El punto de intersección de los tres ejes radicales se llama* ***centro radical*** *de las tres circunferencias.*

7.2. Teoría de Números

7.2.1. Divisibilidad.

Definición 23 *Si a y b son enteros, decimos que a* ***divide a*** *b (en símbolos, $a \mid b$) si es posible encontrar un entero x de tal manera que $ax = b$.*

Recordemos que si x es un número real cualquiera, entonces el **valor absoluto** de x, denotado por $|x|$, es su distancia al 0 en la recta numérica real.

Propiedades

1. Para a y b enteros, $a \mid b$ si y sólo si $|a| \mid |b|$.
2. Si $a \mid b$ y $b \neq 0$, entonces $|a| \leq |b|$.
3. Para todo entero a se tiene que $a \mid a$.
4. Si a, b y c son enteros tales que $a \mid b$ y $b \mid c$, entonces $a \mid c$.
5. Es posible que $a \mid b$ pero que $b \nmid a$.
6. Para a y b enteros, $a \mid b$ y $b \mid a$ si y sólo si $|a| = |b|$.

Proposición 17 *Para a, b y c enteros, $a \mid b$ y $a \mid c$ si y sólo si $a \mid rb + sc$ para cualesquiera r y s enteros.*

Corolario 27 *Si a, b, c son enteros tales que $a \mid b$ y $a \mid c$ entonces $a \mid (b+c)$.*

Definición 24 *Si b y c son enteros, todo número que pueda expresarse en la forma $rb + sc$ con r y s enteros, se llama* ***combinación lineal*** *de b y c.*

Corolario 28 *Si b, c y d están relacionados por la ecuación $b + c = d$, y un número a es divisor de cualesquiera dos de ellos, entonces también lo es del tercero.*

Números Primos

Definición 25 *Decimos que un entero $p \neq \pm 1$ es **primo** si sus únicos divisores son ± 1 y $\pm p$.*

Un entero no cero y distinto de ± 1 es **compuesto** si no es primo. Los enteros 1 y -1 no son primos ni compuestos, se llaman **unidades** y al número 0 no se le considera dentro de ninguna de estas categorías.

Teorema 29 (Fundamental de la Aritmética, Primera Parte) *Todo entero distinto de 0 y de ± 1 es producto de primos.*

Observación. Al escribir un número entero como producto de primos, se acostumbra poner primero el signo del número y después escribir sólo primos positivos en orden creciente de magnitud, agrupando los primos que son iguales en la potencia correspondiente. Esta forma se llama la **descomposición canónica** del número. Por ejemplo, la descomposición canónica de -180 es $-2^2 3^2 5$.

Necesitamos saber cómo decidir si cierto número es primo o no; para esto, basta ver que si un número positivo a es producto de dos divisores positivos, entonces alguno de ellos debe ser menor o igual que $\sqrt{a}$ (pues el producto de dos números positivos mayores que $\sqrt{a}$ es mayor que a), de donde surge el siguiente lema.

Lema 3 *Sea a un número entero mayor que 1 con la propiedad de que ningún número primo menor o igual que $\sqrt{a}$ lo divide. Entonces a es primo.*

Teorema 30 *Hay una infinidad de números primos.*

Se enunciarán ahora algunos criterios de divisibilidad por números pequeños.

- **Criterio de divisibilidad por 2.** Un entero a es divisible por 2 si y sólo si a termina en 0, 2, 4, 6 y 8.
- **Criterio de divisibilidad por 3.** Un entero a es divisible por 3 si y sólo si la suma de las cifras de a es divisible por 3. (Por ejemplo, 474 es divisible por 3 pues $4+7+4=15$ y 15 es múltiplo de 3.)
- **Criterio de divisibilidad por 4.** Un entero a es divisible por 4 si y sólo si el número formado por las dos últimas cifras de a lo es. (Por ejemplo, 7923 no es divisible por 4 ya que 23 no es múltiplo de 4.)
- **Criterio de divisibilidad por 5.** Un entero a es divisible por 5 si y sólo si termina en 0 ó 5.
- **Criterio de divisibilidad por 6.** Un entero a es divisible por 6 si y sólo si a es divisible por 2 y por 3.

- **Criterio de divisibilidad por 8.** Un entero a es divisible por 8 si y sólo si el número formado por las últimas tres cifras de a lo es. (Por ejemplo, 27 256 es divisible por 8 pues 256 lo es.)
- **Criterio de divisibilidad por 9.** Un entero a es divisible por 9 si y sólo si la suma de las cifras de a es divisible por 9. (Por ejemplo, 376 831 no es múltiplo de 9 pues $3+7+6+8+3+1=28$, que no es múltiplo de 9.)
- **Criterio de divisibilidad por 10.** Un entero a es divisible por 10 si y sólo si a termina en 0.
- **Criterio de divisibilidad por 11.** Un entero a es divisible por 11 si y sólo si la diferencia de la suma de las cifras en posición impar de a menos la suma de las cifras en posición par de a es divisible por 11. (Por ejemplo, 78 425 397 248 sí es divisible por 11 pues $(8+2+3+7+4)-(7+4+5+9+2+8)=24-35=-11$, que es divisible por 11.)
- **Criterio de divisibilidad por 12.** Un entero a es divisible por 12 si y sólo si a es divisible por 4 y por 3.

Existen diversos criterios de divisibilidad por 7, pero ninguno de ellos es realmente práctico como los que se mencionan arriba.

7.2.2. Factorización en números primos.

Teorema 31 (Fundamental de la Aritmética, Segunda Parte) *Todo entero distinto de 0 y de ± 1 es producto de primos en forma única salvo orden y signo.*

Gracias al Teorema Fundamental de la Aritmética, cada número entero distinto de 0 y ± 1 tiene una sola descomposición canónica. Agregando potencias de cero a las descomposiciones canónicas de dos o más números se pueden usar los mismos primos en las factorizaciones de todos ellos. Por ejemplo si $a = 675 = 3^3 \times 5^2$ y $b = 20 = 2^2 \times 5$, entonces podemos escribir $a = 2^0 \times 3^3 \times 5^2$ y $b = 2^2 \times 3^0 \times 5$. Con esta escritura es muy fácil determina si un número es divisible por otro o no, comos nos dice el siguiente corolario.

Corolario 32 *Sean $a = \pm p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}$ y $b = \pm p_1^{f_1} p_2^{f_2} \dots p_k^{f_k}$, donde $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ son primos positivos y las e_i y f_j son enteros no negativos. Entonces $a \mid b$ si y sólo si para toda $i = 1, 2, \dots, k$, se tiene que $e_i \leq f_i$.*

Corolario 33 *Si $a = \pm p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}$ es la descomposición canónica del entero a, entonces*

1. *El número de divisores positivos de a es*

$$\tau(a) = (e_1+1)(e_2+1)\cdots(e_k+1),$$

2. *la suma de los divisores positivos de a está dada por*

$$(p_1^0 + p_1^1 + \cdots + p_1^{e_1})(p_2^0 + p_2^1 + \cdots + p_2^{e_2}) \cdots (p_k^0 + p_k^1 + \cdots + p_k^{e_k}),$$

3. *el producto de los divisores positivos de a es igual a*

$$a^s \text{ con } s = \frac{\tau(a) - 1}{2}.$$

Lema 4 (de Euclides) *Si p es un número primo que divide al producto de dos enteros positivos a y b, es decir, $p|ab$ entonces $p|a$ o $p|b$.*

7.2.3. Algoritmo de Euclides.

Teorema 34 (Algoritmo de la División) *Dados dos enteros a y b con $b \neq 0$, existen enteros únicos q y r de tal forma que*

$$a = bq + r, \text{ con } 0 \leq r < |b|.$$

El número q en la proposición anterior es el **cociente** (de la división de a entre b) y el número r es el **residuo** (de la división de a entre b).

Observación. Si a y b son enteros y $b \neq 0$, entonces $b \mid a$ si y sólo si el residuo r de la división de a entre b es 0.

Definición 26 *Dados dos enteros m y n diferentes de cero, es claro que 1 divide a ambos números y que además existe un número finito de divisores comunes. Definimos su **máximo común divisor**, en símbolos*

$$\text{mcd}(m, n)$$

como el mayor de los divisores comunes a ellos; es decir,

$$d = \text{mcd}(m, n),$$

si

1. *$d|m$ y $d|n$*
2. *Para cualquier c tal que $c|m$ y $c|n$ se tiene que $c \leq d$.*

Se estudiarán a continuación algunas propiedades del máximo común divisor de dos números; la generalización es sencilla usando la fórmula recursiva

$$\text{mcd}(a_1, a_2, \ldots, a_k) = \text{mcd}(a_1, \text{mcd}(a_2, \ldots, a_k)).$$

Propiedades

Sean m y n enteros no cero. Entonces

1. $\text{mcd}(m, n) = \text{mcd}(|m|, |n|)$;
2. $\text{mcd}(m, n) > 0$;
3. si $m \mid n$, entonces $\text{mcd}(m, n) = |m|$;
4. si $d = \text{mcd}(m, n)$, $m = dm'$ y $n = dn'$ (es decir, m' y n' son los respectivos cocientes de m y n entre d), entonces $\text{mcd}(m', n') = 1$.
5. Sea p un número primo. Si p no divide a n entonces $\text{mcd}(p, n) = 1$.
6. Para cualquier número natural k se tiene $\text{mcd}(km, kn) = k\,\text{mcd}(m, n)$.
7. Si m y n se factorizan en primos como $m = \pm p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ y $n = \pm p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k}$, entonces $\text{mcd}(m, n) = p_1^{\text{mín}(\alpha_1, \beta_1)} \cdots p_k^{\text{mín}(\alpha_k, \beta_k)}$.

Definición 27 *Si $\text{mcd}(a, b) = 1$, decimos que a y b son **primos relativos**, **primos entre sí** o **coprimos**.*

Observación. Notemos que dos números pueden ser primos relativos aunque ninguno de ellos sea número primo, por ejemplo, ya que $\text{mcd}(4, 9) = 1$, 4 y 9 son primos relativos, sin embargo, no son números primos.

Lema 5 *Sean a y b enteros no cero con $b \nmid a$. Si q y r son enteros tales que $a = bq + r$, entonces $\text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(b, r)$.*

Teorema 35 (Algoritmo de Euclides) *Sean a y b enteros no cero. Entonces $\text{mcd}(a, b)$ es combinación lineal de a y b.*

Corolario 36 *Sean a y b dos enteros no cero y sea d su máximo común divisor. Entonces cualquier divisor común de a y de b, también lo es de d.*

El siguiente corolario nos dice cuáles números pueden ser combinación lineal de dos enteros a y b diferentes de cero.

Corolario 37 *Sean a y b enteros no cero y sea d su máximo común divisor. Un número c es combinación lineal de a y b si y sólo si es múltiplo de d; es decir, d es la mínima combinación lineal positiva de a y b.*

Corolario 38 *Todo entero a puede expresarse como combinación lineal de dos números primos p y q.*

7.2.4. Mínimo Común Múltiplo

Definición 28 *Sean m y n dos números naturales. Consideremos ahora todos los múltiplos positivos de m: $m, 2m, 3m, \ldots$ y los múltiplos positivos de n: $n, 2n, 3n, \ldots$. Notemos que mn es múltiplo tanto de m como de n. Al múltiplo común positivo más pequeño le llamamos el* ***mínimo común múltiplo*** *de m y n, y lo denotamos por $\operatorname{mcm}(m, n)$.*

Algunas propiedades del mínimo común múltiplo son:

1. $\operatorname{mcd}(m, n) \cdot \operatorname{mcm}(m, n) = mn$.
2. Si c es un número natural tal que $m|c$ y $n|c$, entonces $\operatorname{mcm}(m, n)|c$, en particular $\operatorname{mcm}(m, n) \leq c$.
3. Si $m|n$ entonces $\operatorname{mcm}(m, n) = n$.
4. Si $k = \operatorname{mcm}(m, n)$, $k = m'm$ y $k = n'n$, entonces $\operatorname{mcd}(m', n') = 1$.
5. Sea p un número primo. Si p no divide a n entonces $\operatorname{mcm}(p, n) = pn$.
6. Para cualquier número natural k se tiene $\operatorname{mcm}(km, kn) = k \operatorname{mcm}(m, n)$.
7. Si m y n se factorizan en primos como $m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ y $n = p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k}$, entonces $\operatorname{mcd}(m, n) = p_1^{\max(\alpha_1, \beta_1)} \cdots p_k^{\max(\alpha_k, \beta_k)}$.

7.2.5. Congruencias

Definición 29 *Dados dos enteros a y b, diremos que son* ***congruentes módulo*** *m si $m|(a - b)$ y se escribe $a \equiv b \pmod{m}$. Esto es equivalente a afirmar que a y b dejan el mismo residuo cuando se les divide por m.*

Algunas propiedades de las congruencias son:

1. Si $a \equiv b \pmod{m}$ y $c \equiv d \pmod{m}$ entonces $a + c \equiv b + d \pmod{m}$.
2. Si $a \equiv b \pmod{m}$ y $c \equiv d \pmod{m}$ entonces $ac \equiv bd \pmod{m}$. En particular, si $a \equiv b \pmod{m}$ entonces para cualquier natural k, $a^k \equiv b^k \pmod{m}$.
3. $m|a$ si y sólo si $a \equiv 0 \pmod{m}$.
4. Si a y m son primos relativos y $a \equiv b \pmod{m}$, entonces b y m también son primos relativos.
5. Si k y m son primos relativos, entonces existe un entero h tal que $kh \equiv 1 \pmod{m}$.

Ahora vamos a fijar un número m. La relación en los enteros de ser congruentes módulo m es una relación de equivalencia, esto es, se cumple:

- Reflexividad: $a \equiv a \pmod{m}$ para todo número entero a.

- Simetría: Si $a \equiv b \pmod{m}$ entonces
$$b \equiv a \pmod{m}.$$
- Transitividad: Si $a \equiv b \pmod{m}$ y $b \equiv c \pmod{m}$ entonces
$$a \equiv c \pmod{m}.$$

Supongamos que m es un natural diferente de cero. Entonces, por ser la congruencia módulo m una relación de equivalencia, podemos clasificar a todos los enteros de la siguiente forma: los que son congruentes con 0, con 1, ..., con $m - 1$. Cualquier entero cae en uno y sólo uno de estos conjuntos.

En relación a las congruencias, tenemos algunos resultados.

Teorema 39 (Chino del Residuo) *Sean $n_1, \ldots, n_k$ números enteros coprimos dos a dos. Entonces, dados $a_1, \ldots, a_k$ enteros, existe un entero x que resuelve el sistema de congruencias*

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \pmod{n_1} \\ &\vdots \\ x &\equiv a_k \pmod{n_k}. \end{aligned}$$

Más aún, todas las soluciones x de este sistema son congruentes módulo el producto $n_1 \cdots n_k$.

Teorema 40 (Pequeño Teorema de Fermat) *Sea p un número primo, entonces para cualquier número entero a,*

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

Si a no es divisible por p, entonces se tiene además que

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Para enunciar una generalización del Pequeño teorema de Fermat, necesitamos la siguiente definición.

Definición 30 *Sea n un número natural. $\phi(n)$ denota el número de enteros entre 1 y n que son primos relativos con n. A la función $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ se le llama la* ***función ϕ de Euler****.*

En particular, si p es un número primo, se tiene que $\phi(p) = p - 1$.

Teorema 41 (de Euler) *Sea n cualquier número entero. Si a y n son primos relativos, entonces*

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Teorema 42 (de Wilson) *Si p es un número primo, entonces*

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

Teorema 43 (de la Congruencia Lineal) *Sean a y b dos números enteros y n un número natural. Entonces la congruencia*

$$ax \equiv b \pmod{n}$$

tiene una solución para x si y sólo si b es divisible por $\mathrm{mcd}(a,n)$. En este caso, si x_0 es una solución, el conjunto de todas las soluciones está dado por

$$\left\{x_0 + k\frac{n}{\mathrm{mcd}(a,n)} : k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

7.3. Combinatoria

7.3.1. Conteo

Proposición 18 *Cada conjunto con n elementos tiene 2^n subconjuntos.*

Definición 31 *Dado $n \in \mathbb{N}$ denotaremos por $n!$ al producto de todos los números naturales menores o iguales que n; esto es,*

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$$

Para poder incluir el caso $n = 0$, se define

$$0! = 1$$

Principio 1 (Fundamental de Conteo) *Si existen m formas de realizar una tarea y n formas de realizar otra tarea distinta; el total de formas de realizar ambas es $m \cdot n$.*

Definición 32 *Sea un conjunto E que consiste de n elementos y sea k un entero entre 0 y n.*

- *Una **permutación** de orden k (de los elementos de E) es una selección ordenada, sin repeticiones, de k elementos de E.*
- *Una **combinación** de orden k (de los elementos de E) es un subconjunto de E con k elementos.*

Teorema 44 *El número de combinaciones de n objetos diferentes tomados de k en k, con $k \leq n$ es*

$$\binom{n}{k} = C_k^n = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Teorema 45 *Para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que*

$$C_0^n = 1 = C_n^n$$

Teorema 46 *Para todo n y todo $k < n$, se tiene que*

$$C_k^n + C_{k+1}^n = C_{k+1}^{n+1}$$

Principio 2 (De Inclusión y Exclusión) *Si tenemos n conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (posiblemente con elementos en común), entonces el número total k de elementos que tienen entre todos es igual a $k_1 - k_2 + k_3 - k_4 + \cdots \pm k_n$, donde k_1 es la suma de los elementos que pertenecen a (por lo menos) uno de los conjuntos, k_2 es la suma de los elementos que pertenecen a (por lo menos) dos de los conjuntos, y así sucesivamente hasta k_n, que es el número de elementos en común a todos los conjuntos.*

Proposición 19 *Dados naturales r y N, el número de r-adas $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ de enteros $a_1, a_2, \ldots, a_r$ que satisfacen $a_1 + a_2 + \cdots + a_r = N$ sujetos a restricción: $a_1 \geq k_1, a_2 \geq k_2, \ldots, a_r \geq k_r$, donde $k_1, k_2, \ldots, k_r$ son enteros dados, es*

$$\binom{N - (k_1 + k_2 + \cdots + k_r) + r - 1}{r-1}$$

Permutaciones

Teorema 47 *El total de formas en que se pueden permutar n objetos tomados de n en n es*

$$P_n^n = n!$$

Teorema 48 *El número de permutaciones de n objetos en k lugares está dado por*

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

para $k \leq n$.

Definición 33 *Llamamos **permutaciones cíclicas** al número de formas diferentes de acomodar n objetos en círculo y lo denotamos por PC_n.*

*Cuando se acomodan n objetos en k lugares con la opción de repetir los objetos, tenemos **permutaciones con repetición**, las cuales se denotan $\overline{P_k^n}$.*

7.3.2. Teorema del Binomio de Newton

El **Triángulo de Pascal** está formado por número enteros y se construye de la siguiente manera, en donde los elementos de enmedio son la suma de los valores de los dos elementos encima de él.

$$\begin{array}{ll} n=0: & \qquad\qquad\qquad\qquad 1 \\ n=1: & \qquad\qquad\qquad 1 \qquad 1 \\ n=2: & \qquad\qquad 1 \qquad 2 \qquad 1 \\ n=3: & \qquad\quad 1 \qquad 3 \qquad 3 \qquad 1 \\ n=4: & \qquad 1 \qquad 4 \qquad 6 \qquad 4 \qquad 1 \\ n=5: & \quad 1 \qquad 5 \qquad 10 \qquad 10 \qquad 5 \qquad 1 \end{array}$$

Empezando por el renglón cero, los valores que aparecen en el renglón n representan los coeficientes del polinomio que resulta de elevar el binomio $x+y$ a la n-ésima potencia. Por ejemplo para $n=5$ tenemos

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5.$$

Cuando en lugar de suma se tiene una sustracción, entonces los signos de los coeficientes se van alternando de positivo a negativo. Por ejemplo para $n=5$ tenemos

$$(x-y)^5 = x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5.$$

También podemos ver el Triángulo de Pascal de la siguiente forma

$$\begin{array}{ll} n=0: & \qquad\qquad\qquad\qquad \binom{0}{0} \\ n=1: & \qquad\qquad\qquad \binom{1}{0} \qquad \binom{1}{1} \\ n=2: & \qquad\qquad \binom{2}{0} \qquad \binom{2}{1} \qquad \binom{2}{2} \\ n=3: & \qquad\quad \binom{3}{0} \qquad \binom{3}{1} \qquad \binom{3}{2} \qquad \binom{3}{3} \\ n=4: & \qquad \binom{4}{0} \qquad \binom{4}{1} \qquad \binom{4}{2} \qquad \binom{4}{3} \qquad \binom{4}{4} \\ n=5: & \quad \binom{5}{0} \qquad \binom{5}{1} \qquad \binom{5}{2} \qquad \binom{5}{3} \qquad \binom{5}{4} \qquad \binom{5}{5} \end{array}$$

en donde, de la misma manera, el renglón n-ésimo corresponde a los coeficientes del desarrollo del binomio $(x+y)^n$.

En general, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, el desarrollo de $(x+y)^n$ lo obtenemos de la siguiente fórmula llamada **Binomio de Newton**.

Teorema 49 (Del Binomio de Newton) *Sean x y y dos números y sea n en $\mathbb{N}$. Entonces*

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i}y^i$$

Teorema 50 *Sea n en $\mathbb{N}$. Entonces*

$$2^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$$

7.3.3. Principio de Casillas

Principio 3 (De Casillas) *Si tenemos n casillas, y en ellas se colocan $n+1$ objetos, entonces existe al menos una casilla donde colocamos más de un objeto.*

Principio 4 (De Casillas, primera versión) *Si $n+1$ objetos se deben acomodar en n casillas, entonces en alguna casilla quedarán al menos dos objetos.*

Principio 5 (De Casillas, segunda versión) *Si $nk+1$ objetos se deben acomodar en n casillas, entonces en alguna casilla quedarán más de k objetos.*

Principio 6 (De Casillas, tercera versión)

- *Si m objetos se deben acomodar en n casillas, entonces en alguna casilla deberán quedar al menos $\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil$ objetos.*
- *Si m objetos se deben acomodar en n casillas, entonces en alguna casilla deberán quedar al menos $\left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor$ objetos.*

Aquí $\lceil x \rceil$ es igual al menor entero que es mayor o igual a x, y $\lfloor x \rfloor$ es igual al mayor entero menor o igual a x. Notemos que si $m = nk+1$, se tiene que

$$\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil = \left\lceil \frac{nk+1}{n} \right\rceil = \left\lceil k + \frac{1}{n} \right\rceil = k+1$$

y entonces la tercera versión del principio generaliza a la segunda versión.

Principio 7 (De Casillas, versión con promedios)

- *Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números positivos y a es el promedio de ellos, entonces hay un a_i con $a_i \leq a$*
- *Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números positivos y a es el promedio de ellos, entonces hay un a_j con $a_j \geq a$*

En efecto, si para todo número a_i se cumple que $a_i > a$, entonces el promedio de los a_i es mayor que a. Notemos que no se señaló a cuál promedio nos referimos de entre los siguientes

Promedio Aritmético: $\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$

Promedio Geométrico: $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}$

Promedio Armónico: $\dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$

ya que los tres funcionan en esta versión.

Principio 8 (De Casillas, versión con sumas)

- *Si* $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *y* $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ *son dos colecciones de números que cumplen con* $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq b_1 + b_2 + \cdots + b_n$, *entonces hay un índice* i *tal que* $a_i \geq b_i$.

- *Si* $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *y* $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ *son dos colecciones de números que cumplen con* $a_1 + a_2 + \cdots + a_n < b_1 + b_2 + \cdots + b_n$, *entonces hay un índice* i *tal que* $a_i < b_i$.

Principio 9 (De Casillas, versión fuerte) *Consideremos* k_1, k_2, ..., k_n *enteros positivos. Si* $k_1 + k_2 + \cdots + k_n + 1$ *objetos se deben acomodar en* n *casillas, entonces existe un* i *tal que en la casilla* i *deberán quedar al menos* $k_i + 1$ *objetos.*

En términos de colores, esta versión fuerte del Principio de Casillas, asegura que: "Si hay $k_1 + k_2 + \cdots + k_n + 1$ objetos que se deben colorear con uno de los n colores entonces hay un color i que se usa para colorear al menos $k_i + 1$ objetos".

7.3.4. Gráficas

Definición 34 *Una* **gráfica** *es una colección de puntos unidos por líneas. Los puntos se llaman* **vértices** *y las líneas que los unen se llaman* **aristas**.

Definición 35 *Dados dos vértices* u *y* v, *un* **camino** *de* u *a* v *es una sucesión alternada de vértices y aristas* $v_0, a_0, v_1, a_1, \ldots, v_n, a_n$, *donde* $v_0 = u$, $v_n = v$, $a_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ *para cada para cada* $i = 1, \ldots, n$. *El número de aristas del camino se llamará la* **longitud del camino**.

Diremos que el camino es una **trayectoria** *si los vértices no se repiten.*

Diremos que el camino es un **paseo** *si las aristas no se repiten.*

Definición 36 *Una gráfica de* n *vértices en donde cada pareja de vértices está unida por una arista se conoce como una* **gráfica completa** *de* n *vértices y se denota por* K_n. *Notemos que* K_n *tiene* $\binom{n}{2}$ *aristas.*

Definición 37 *Una gráfica es* **conexa** *si cualesquiera dos vértices se conectan por un camino.*

Bibliografía

[1] Alberro Semerena A., Bulajich Manfrino R., Rubio Barrios C.J., *Problemas Avanzados. Cuadernos de Olimpiadas en Matemáticas.* Instituto de Matemáticas, UNAM, México, 2010.

[2] Andreescu T., Gelca R., *Mathematical Olympiad Challenges.* Birkhäuser, 2nd Ed., Boston, 2009.

[3] Bulajich Manfrino R., Gómez Ortega J. A., *Geometría. Cuadernos de Olimpiadas en Matemáticas.* Instituto de Matemáticas, UNAM, México, 2002.

[4] Bulajich Manfrino R., Gómez Ortega J. A., *Geometría. Ejercicios y Problemas. Cuadernos de Olimpiadas en Matemáticas.* Instituto de Matemáticas, UNAM, México, 2002.

[5] Bulajich Manfrino R., Gómez Ortega J. A., Valdez Delgado R., *Desigualdades. Cuadernos de Olimpiadas en Matemáticas.* Instituto de Matemáticas, UNAM, 4a Ed., México, 2010.

[6] Coxeter H. S. M., *Geometry Revisited.* The Mathematical Association of America, 1967.

[7] Coxeter H. S. M., *Introduction to Geometry.* John Wiley and Sons, Toronto, 1969.

[8] Gómez Ortega J. A., Valdez Delgado R., Vázquez Padilla R., *Principio de las Casillas. Cuadernos de Olimpiadas en Matemáticas.* Instituto de Matemáticas, UNAM, 4a Ed., México, 2011.

[9] Illanes A., *Principios de Olimpiada. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas* Instituto de Matemáticas, UNAM, México, 2001.

[10] Joyce D. E., *Euclid's Elements.* Department of Mathematics and Computer Science, Clark University, Worcester MA, 1998. http://aleph0.clarku.edu/ djoyce/java/elements/elements.html

[11] Niven I., Zukerman H., *Introducción a la Teoría de los Números,* Limusa-Wiley, México, 1972.

[12] Pérez Seguí M. L., *Combinatoria. Cuadernos de Olimpiadas en Matemáticas.* Instituto de Matemáticas, UNAM, 3ra. Ed., México, 2005.

[13] Pérez Seguí M. L., *Combinatoria Avanzada. Cuadernos de Olimpiadas en Matemáticas.* Instituto de Matemáticas, UNAM, 3ra. Ed., México, 2010.

[14] Pérez Seguí M. L., *Matemáticas Preolímpicas. Cuadernos de Olimpiadas en Matemáticas.* Instituto de Matemáticas, UNAM, México, 2008.

[15] Pérez Seguí M. L., *Teoría de Números. Cuadernos de Olimpiadas en Matemáticas.* Instituto de Matemáticas, UNAM, México, 2009.

[16] Pogorélov A. V., *Geometría Elemental.* Instituto Politécnico Nacional, México, 1998.

[17] Shively L. S., *Introducción a la Geometría Moderna.* Compañía Editorial Continental, México, 1963.

[18] Soberón Bravo P., *Combinatoria para Olimpiadas. Cuadernos de Olimpiadas en Matemáticas.* Instituto de Matemáticas, UNAM, México, 2010.

[19] Vilenkin N., *¿De cuántas formas? Combinatoria.* Editorial Mir, Moscú, 1972.

[20] Wentworth J., Smith D. E., *Geometría Plana y del Espacio.* Editorial Porrúa, México, 2000.

Índice alfabético

Algoritmo de Euclides, 143
Algoritmo de la división, 142
Altura de un triángulo, 5, 15, 28, 31, 64, 69, 71, 73, 93, 133
Ángulo, 11, 45, 127
Ángulo central, 45, 94, 136
Ángulo complementario, 127
Ángulo exterior, 128, 136
Ángulo inscrito, 40, 41, 81, 94, 109, 136
Ángulo interior, 137
Ángulo recto, 18, 87, 91, 126, 127
Ángulo semi-inscrito, 81, 109, 136
Ángulo suplementario, 66, 127
Ángulos adyacentes, 127
Ángulos alternos, 50, 109, 128
Ángulos colaterales, 109, 128
Ángulos correspondientes, 109, 128
Ángulos en las circunferencias, 45, 78, 81, 94, 95, 109, 136
Ángulos externos, 14, 45, 65, 109, 128
Ángulos internos, 14, 50, 65, 69, 95, 109, 128
Ángulos opuestos por el vértice, 66, 94, 127
Arista de una gráfica, 150

Baricentro, 134
Binomio de Newton, 148
Bisectriz de un ángulo, 9, 14, 17, 19, 40, 41, 65, 69, 75, 93, 100, 124, 126, 133

Camino, 150
Centro de gravedad, 134
Centro radical, 139
Centroide, 134
Circuncentro, 19, 20, 93, 99, 100, 124, 134
Circuncírculo, 9, 18, 20, 25, 40, 51, 52, 64, 81, 87, 99, 123, 134
Circunferencia de los 9 puntos, 138
Circunradio, 20, 99, 134
Cociente de la división, 142
Combinación, 75, 146
Combinación lineal, 139
Conciclicidad de cuatro puntos, 65, 137
Congruencia de números, 77, 89, 101, 103, 113, 144
Criterios de congruencia, 38, 41, 54, 58, 100, 124, 130
Criterios de divisibilidad, 140
Criterios de semejanza, 41, 51, 52, 58, 73, 74, 78, 81, 91, 100, 108, 109, 125, 131
Cuadriláteros cíclicos, 40, 41, 52, 64, 66, 75, 94, 95, 100, 109, 124, 125, 137

Descomposición canónica, 140
Distancia de un punto a una recta, 134
Divisibilidad, 6, 11, 14, 17, 21, 29, 42, 46, 47, 63, 70, 79, 101, 113, 115, 139

Eje radical, 87, 139

Factorial de un número natural, 146
Factorización en números primos, 63, 114, 141
Fórmula de Herón, 135
Función ϕ de Euler, 145

Gráfica, 7, 32, 84, 150
Gráfica completa, 150

Gráfica conexa, 150
Gravicentro, 134

Incentro, 25, 65, 75, 123, 125, 126, 134
Incírculo, 17, 75, 76, 134
Inradio, 134

Lema de Euclides, 142
Ley del paralelogramo, 132
Longitud del camino, 150

Máximo común divisor (mcd), 15, 70, 142
Mínimo común múltiplo (mcm), 144
Mediana de un triángulo, 61, 71, 72, 126, 133
Mediatriz de un segmento, 5, 14, 18, 28, 61, 69, 87, 100, 133

Número compuesto, 21, 27, 101, 140
Número primo, 9, 24, 41, 42, 47, 101, 102, 112–114, 140
Números coprimos, 24, 102, 112, 113, 143
Números primos entre sí, 24, 102, 112, 143
Números primos relativos, 24, 102, 112, 114, 143

Ortocentro, 25, 64, 123, 134

Paralelogramo, 13, 57, 124, 132
Paseo, 150
Permutación, 8, 36, 146
Permutaciones cíclicas, 147
Permutaciones con repetición, 7, 31, 147
Polígono cíclico, 137
Polígono inscriptible, 9, 42, 137
Potencia de un punto, 138
Principio de Casillas, 16, 74, 110, 111, 122, 149
Principio de Casillas, primera versión, 149
Principio de Casillas, segunda versión, 149
Principio de Casillas, tercera versión, 149
Principio de Casillas, versión con sumas, 150
Principio de Casillas, versión fuerte, 150
Principio de Casillas, versión con promedios, 149
Principio de exclusión, 147
Principio de inclusión, 147
Principio Fundamental de Conteo, 5–8, 12, 19, 27, 29, 31, 36, 43, 48, 51, 57, 67, 92, 146
Promedio aritmético, 149
Promedio armónico, 149
Promedio geométrico, 149
Puntos concíclicos, 12, 14, 51, 63, 137

Recta de Euler, 137
Rectas concurrentes, 134
Rectas paralelas, 7, 12, 25, 30, 31, 50, 57, 108, 109, 123–126, 128
Relación de Chasles, 135
Residuo de la división, 142

Segmento dirigido, 135
Semejanza de triángulos, 128

Teorema Chino del Residuo, 145
Teorema de Ceva, 135
Teorema de Euler, 145
Teorema de la Bisectriz, 133
Teorema de la Congruencia Lineal, 146
Teorema de Lehmus-Steiner, 133
Teorema de Menelao, 135
Teorema de Napoleón, 99
Teorema de Pitágoras, 54, 61, 69, 72, 74, 132
Teorema de Ptolomeo, 137
Teorema de Thales, primer, 31, 109, 126, 129
Teorema de Thales, segundo, 31, 109, 126, 129
Teorema de Varignon, 132
Teorema de Wilson, 146
Teorema del Binomio de Newton, 92, 148

Teorema Fundamental de la Aritmética, primera parte, 47, 140
Teorema Fundamental de la Aritmética, segunda parte, 47, 141
Teorema Pequeño de Fermat, 102, 145
Trayectoria, 150
Triángulo acutángulo, 14, 17, 18, 25, 63, 75, 81, 123, 128
Triángulo de Pascal, 148
Triángulo equilátero, 9, 12, 14, 15, 20, 21, 40, 54, 61, 68, 69, 71, 72, 85, 99, 100, 104, 128
Triángulo escaleno, 128
Triángulo isósceles, 40, 41, 52–54, 69, 87, 91, 94, 109, 128
Triángulo medial, 131
Triángulo obtusángulo, 128
Triángulo rectángulo, 12, 18, 51, 66, 87, 91, 92, 128
Triángulos congruentes, 8, 36, 54, 58, 100, 124, 130
Triángulos semejantes, 18, 50–52, 58, 73, 74, 78, 81, 91, 93, 100, 108, 109, 125, 131

Valor absoluto, 139
Vértice de un ángulo, 127
Vértice de una gráfica, 7, 32, 84, 150