TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2014, No. 4

Comité Editorial:

Marco Antonio Figueroa Ibarra

Luis Eduardo García Hernández

Carlos Jacob Rubio Barrios

Pedro David Sánchez Salazar

Contenido

Presentación	IV
Artículos de matemáticas: El poder de las proyecciones sobre una línea	**1**
Problemas de práctica	**10**
Soluciones a los problemas de práctica	**12**
Problemas de Entrenamiento	**20**
Problemas de Entrenamiento. Año 2014 No. 4	20
Soluciones a los Problemas de Entrenamiento. Año 2014 No. 1	22
Concursos Estatales	**28**
Olimpiada de Matemáticas en Yucatán	28
Olimpiadas Internacionales	**30**
XXIX Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas	30
Problemas y Soluciones de Olimpiadas Internacionales	**32**
55^{a} Olimpiada Internacional de Matemáticas	32
Una vida, un matemático: Algunos Recuerdos	**41**
Apéndice	**49**
Bibliografía	**53**
Directorio del Comité Organizador de la OMM	**55**

Presentación

Tzaloa,[1] la revista oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM), es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana (SMM). Los artículos, problemas, soluciones, exámenes y demás información que en ella encontrarás, fueron seleccionados con el fin de apoyar a profesores y estudiantes de nivel medio superior que cada año se preparan para participar en los distintos concursos de matemáticas que se realizan dentro y fuera de nuestro país.

Tzaloa, Año 2014, Número 4

Por ser el último número del año, el tema que hemos escogido para el artículo de Matemáticas corresponde al nivel avanzado. Bajo el título *El poder de las proyecciones sobre una línea*, Jesús Jerónimo Castro, de manera gradual, nos introduce en el *Teorema de Helly* mostrándonos ejemplos de sus versiones para 1 y 2 dimensiones. El artículo concluye presentando al *Teorema de Jung* y desde luego, al final se incluye una interesante lista de ejercicos donde podrás poner a prueba la aplicación de estas nuevas herramientas.

Asimismo y como cada fin de año, al final de la revista encontrarás un interesante artículo autobiográfico. En esta ocasión tenemos el orgullo de poder presentar las reflexiones que, con el título *Algunos recuerdos* y partiendo de su propia experiencia personal, Mikhail Gromov, hace sobre el trabajo de un matemático. Estamos seguros que estas páginas harán que todos nuestros lectores, al igual que nosotros, pensemos dos veces antes de decir que es *trivial*.

Además, en nuestras habituales secciones de problemas (*Problemas de Práctica* y *Problemas de Entrenamiento*) encontrarás una variada gama de interesantes retos para todos los niveles y mismos que estamos seguros serán un valioso recurso para tu preparación. Para la sección de *Concursos Estatales* conseguimos los problemas de la 28^a Olimpiada de Matemáticas en Yucatán, los cuales se aplicaron el pasado mes

[1] Vocablo náhuatl cuyo significado en español es *aprender*.

de Abril y mismos que en esta ocasión decidimos presentar sin solución con la idea de que te propongas el reto de reolverlos. Con respecto a las secciones internacionales, en este número te presentamos los enunciados de la XXIX Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas y los problemas con solución de la 55^a Olimpiada Internacional de Matemáticas.

Por último, queremos dar una calurosa bienvenida a Pedro David Sánchez Salazar, quien a partir de este número se integra a nuestro comité editorial en sustitución de Eduardo Velasco, quien desde el número anterior se retiró de este encargo. Sólo nos queda mencionar que hemos puesto todo nuestro entusiasmo y esmero en la intergación de los contenidos que conforman este nuevo número de Tzaloa y esperamos que los problemas, soluciones, exámenes y materiales que hemos escogido sean de interés y utilidad para todos nuestros lectores.

México y las Olimpiadas de Matemáticas

Desde sus inicios la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Este programa solo es posible gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado innumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido para el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

28^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos Estatales.
- Concurso Nacional.

- Entrenamiento, selección y participación de las delgaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la 28^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1° de agosto de 1995. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2014-2015 y, para el 1° de julio de 2015, no deberán haber iniciado estudios universitarios. Para mayor información puedes consultar la página:

`http://www.ommenlinea.org.`

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 28^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará del 9 al 14 de noviembre de 2014 en Toluca, Estado de México. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección que se realizará durante aproximadamente diez días de cada seis semanas a partir de diciembre de 2014 y hasta la fecha de celebración del concurso internacional correspondiente.

Los alumnos que continúen en los entrenamientos nacionales en el mes de marzo, presentarán el examen de la XXVII Olimpiada de la Cuenca del Pacífico.

Con base en el desempeño de los participantes durante ese periodo, se elegirá a los integrantes de las delegaciones mexicanas que asistirán a la 56^a Olimpiada Internacional de Matemáticas (Tailandia, julio de 2015) y a la XXX Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (Puerto Rico, septiembre de 2015).

De entre los concursantes nacidos en 1999 o después y premiados en el Concurso Nacional se seleccionará la delegación que representará a México en la XVII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe (junio de 2015).

De entre los más jóvenes se seleccionará la delegación mexicana que nos representará en la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC).

Agradecimiento

El Comité Editorial de Tzaloa agradece a Francisco Ruiz Benjumeda por su apoyo en la traducción del artículo biográfico.

El poder de las proyecciones sobre una línea

Por Jesús Jerónimo Castro

Nivel Avanzado

El Teorema de Helly

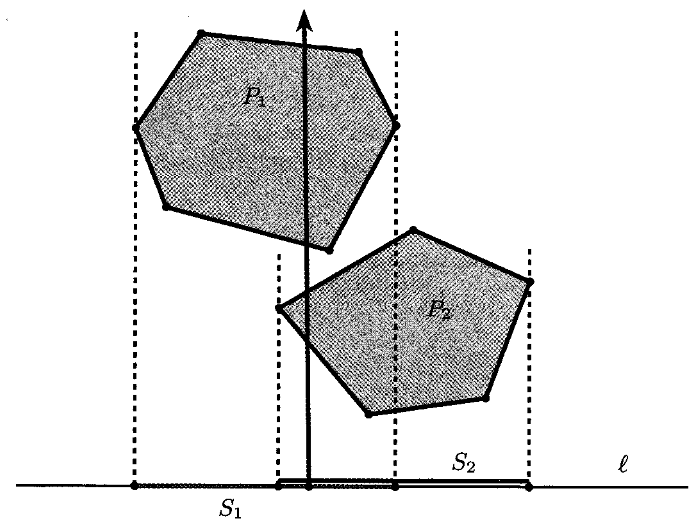
Juanito dibujó varios polígonos en una cartulina los cuales quiere recortar para elaborar la tarea que la maestra de la escuela le encomendó. Como Juanito es muy inquieto y tiene espíritu aventurero, se da cuenta que si escoge dos cualesquiera de los polígonos, entonces puede hacer un corte vertical con sus tijeras de manera que atraviesa a los dos polígonos. ¿Será posible qué con un sólo corte vertical atraviese a todos los polígonos al mismo tiempo? Como veremos más adelante, la respuesta es sí. La justificación de que esto es posible realizarse se fundamenta en uno de los teoremas más importantes de Geometría Combinatoria. Dicho teorema se debe al matemático austriaco Eduard Helly (1907). La versión en dimensión 1, es decir, para conjuntos de segmentos en una línea, dice lo siguiente:

Teorema de Helly (en dimensión 1). *Sea $\mathcal{F}$ una familia finita de segmentos sobre una línea recta. Si cualesquiera dos segmentos de $\mathcal{F}$ tienen punto en común, entonces existe un punto en común para todos los segmentos de $\mathcal{F}$.*

Demostración. Supongamos que la línea coincide con la recta numérica y sea $\mathcal{F} = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ nuestra familia de segmentos. Para cada segmento $S_j, j = 1, 2, \ldots, n$, denotemos por I_j y D_j sus extremos izquierdo y derecho, respectivamente. De entre todos los extremos derechos, consideremos aquél que está más a la izquierda, es decir, el menor de los extremos derechos si éste es considerado como un número real. Denotemos tal extremo derecho como D_{min}. Claramente, todos los demás extremos derechos deben estar a la derecha de D_{min}. Por otro lado, si algún extremo izquierdo I_j estuviese a la derecha de D_{min}, entonces ese segmento S_j no intersecaría al segmento cuyo extremo es D_{min}, contradiciendo las hipótesis. Por lo tanto, todos los extremos I_j están a la izquierda de D_{min} (posiblemente coincidiendo con éste) y en consecuencia D_{min} está contenido en todos los segmentos.

Observación. Notemos que la prueba también funciona si en lugar de considerar el extremo derecho más a la izquierda, consideramos el extremo izquierdo más a la derecha.

Ahora, veremos cómo aplicando una proyección de todos los polígonos de Juanito sobre una línea y utilizando el Teorema de Helly, podemos demostrar su problema.

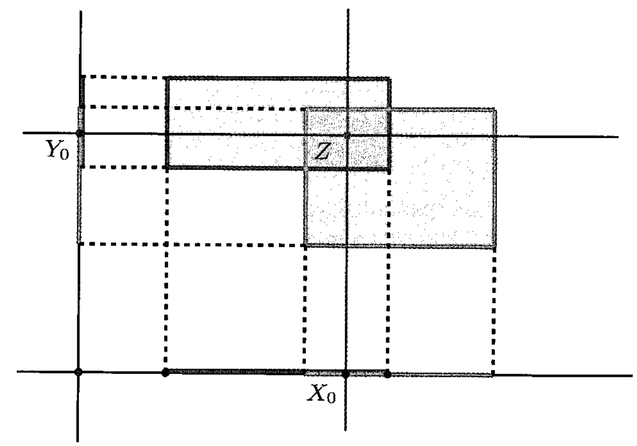


Demostración. Consideremos dos de los polígonos, digamos P_1 y P_2 y hagamos la proyección de éstos sobre ℓ, donde ℓ es la línea horizontal inferior de la cartulina. Con esto obtenemos dos segmentos S_1 y S_2, sobre una línea. Como sabemos que hay una línea vertical que interseca a ambos polígonos, entonces el punto donde esta línea interseca a ℓ es un punto en común para los segmentos S_1 y S_2. Esto mismo sucede para cualquier pareja de polígonos y su pareja de segmentos asociados, entonces podemos aplicar el Teorema de Helly en la recta y obtenemos que hay un punto sobre ℓ el cual le pertenece a todos los segmentos. La línea perpendicular a ℓ a través de ese punto interseca a todos los polígonos.

El siguiente resultado se obtiene mediante una aplicación directa de las ideas que hemos visto hasta ahora.

Ejemplo 1. *Sea $\mathcal{P}$ una familia finita de rectángulos de lados paralelos a los ejes de coordenadas. Supongamos que cualesquiera dos rectángulos se intersecan, entonces existe un punto común a todos los rectángulos de $\mathcal{P}$.*

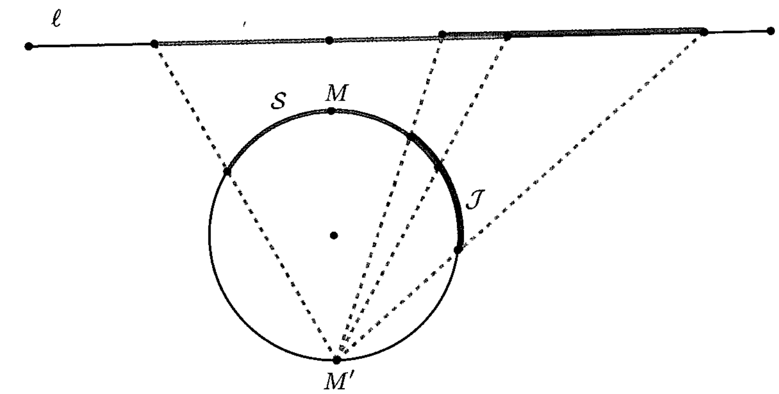
Demostración. Consideremos dos rectángulos cualesquiera y hagamos la proyección de éstos sobre el eje horizontal. Como los rectángulos se intersecan, entonces las proyecciones sobre el eje horizontal son segmentos que también se intersecan. Esto sucede para cualquier pareja de rectángulos y por tanto, aplicando el Teorema de Helly en la línea, podemos asegurar que hay un punto X_0 común para todos los segmentos. Si usamos ahora la proyección de los rectángulos sobre el eje vertical, obtendremos un punto Y_0 común a todos los segmentos en el eje vertical. La línea vertical a través de X_0 interseca a todos los rectángulos de $\mathcal{P}$ y lo mismo hace la línea horizontal que pasa por Y_0. Entonces el punto Z dado por la intersección de esas dos líneas, es un punto común a todos los rectángulos de $\mathcal{P}$.



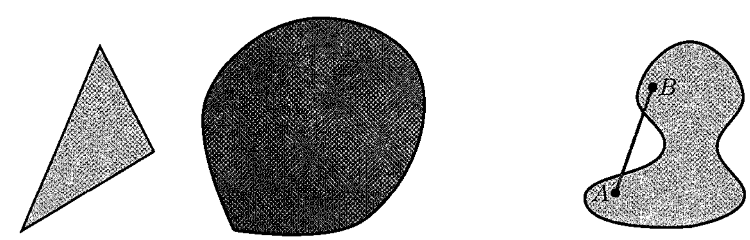
El enunciado del siguiente problema puede ser considerado como un teorema de tipo Helly en la circunferencia.

Ejemplo 2. *Sea $\mathcal{F}$ una familia de arcos circulares, sobre una misma circunferencia, y todos menores que un tercio de la circunferencia. Si cada dos de los arcos se intersecan, entonces todos los arcos de la familia tienen un punto en común.*

Demostración. Sea S el arco de $\mathcal{F}$ que tiene mayor longitud y sea M su punto medio. Consideremos el punto M' localizado en el extremo opuesto del diámetro que pasa por M. Sea ℓ una recta perpendicular al diámetro MM' que no corte a la circunferencia, como se muestra en la figura. Ahora, consideremos un arco cualquiera $\mathcal{J}$ de la familia. Como $\mathcal{J}$ debe intersecar a S y su longitud es menor que un tercio de la circunferencia, y la mitad de S es menor que un sexto de la circunferencia, tenemos que $\mathcal{J}$ no alcanza a cubrir a M', y lo mismo sucede para todos los demás arcos de la familia. Proyectamos todos los arcos de la familia sobre ℓ desde el punto M'. De este modo obtenemos una familia de segmentos sobre ℓ, los cuales se intersecan de dos en dos. De nuevo, por el Teorema de Helly, tenemos que existe un punto en común a todos estos segmentos, digamos X. Se sigue que el segmento $M'X$ interseca a todos los arcos de $\mathcal{F}$. Sea Y el punto donde $M'X$ interseca a la circunferencia, entonces Y es un punto en común a todos los arcos de $\mathcal{F}$.



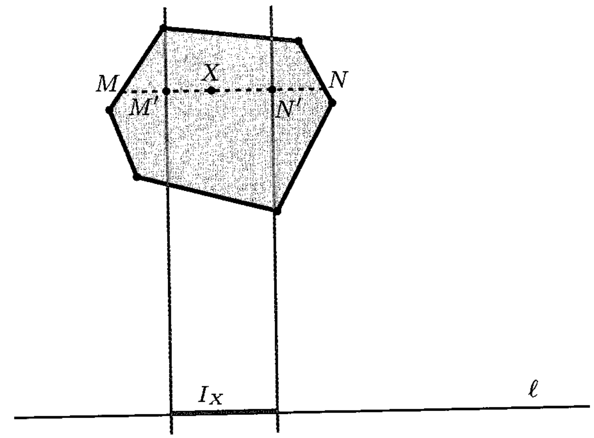
Muchos de los problemas de Geometría Combinatoria tratan sobre conjuntos convexos, entonces, es necesario entender en este momento qué es un conjunto convexo. Básicamente un conjunto es convexo si *no tiene abolladuras*. De manera más formal, un conjunto K es convexo si para cualesquiera dos puntos A y B en K, se cumple que el segmento AB también está en K. Por ejemplo, en la siguiente figura los dos primeros conjuntos son convexos y el tercero no lo es.



Conjuntos convexos　　　　Conjunto no convexo

Veamos ahora cómo utilizando el Teorema de Helly podemos obtener un criterio para saber si un conjunto tiene simetría en una dirección dada.

Ejemplo 3. *Sea S una figura convexa y sea ℓ una línea dada. Supongamos que la figura S tiene la siguiente propiedad: dados cualesquiera dos puntos $\{A, B\} \subset S$, existe una línea L, perpendicular a v, tal que los reflejados de A y B con respecto a L también pertenecen a S. Entonces, S tiene un eje de simetría perpendicular a ℓ.*



Demostración. Sea $X \in S$ un punto arbitrario y sea MN la cuerda de S a través de X y paralela a ℓ. Sean M' y N' los puntos medios de los segmentos MX y XN, respectivamente. Claramente, se puede reflejar X (en la dirección paralela a ℓ) de manera que el punto reflejado esté en S siempre y cuando se refleje X con respecto a una línea perpendicular a ℓ y la cual interseque al segmento $M'N'$. Definimos el segmento I_X como la proyección del segmento $M'N'$ sobre ℓ. Ahora, como sabemos que para cualesquiera dos puntos $A, B \in S$ existe una línea perpendicular a ℓ, con respecto a la cual podemos reflejar a ambos, tenemos que los segmentos I_A e I_B se intersecan. De esta manera, obtenemos una familia de segmentos sobre ℓ los cuales se intersecan por pares. Se sigue, por el Teorema de Helly, que existe un punto Y sobre ℓ el cual pertenece a todos estos segmentos. La línea ortogonal a ℓ a través de Y es un eje de simetría ortogonal de S. La demostración de que este eje es único es sencilla y se deja como ejercicio.

Ahora vamos a analizar otra pregunta que intriga al inquieto de Juanito: *sobre la mesa se ha derramado el refresco y, las moscas que no tardan en aparecer, se posan sobre ésta dispuestas a acabar con el dulce líquido. Juanito tiene un matamoscas circular y cuando se dispone a dar el primer golpe con éste, se da cuenta que cualesquiera tres de las moscas que él escoja, hay una manera de aplastarlas de un sólo golpe. ¿Será posible aplastar a todas las moscas juntas de un sólo golpe?*

Como pronto veremos, la respuesta a este problema también es afirmativa. De nuevo, su explicación se debe al Teorema de Helly, pero ahora en el plano.

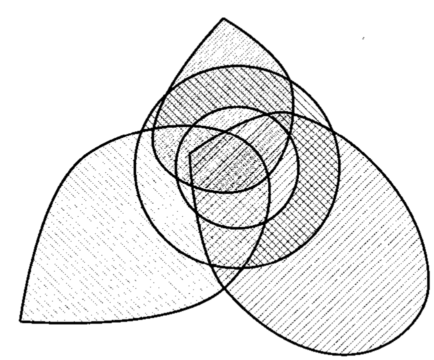
Teorema de Helly (en dimensión 2). *Sea $\mathcal{F}$ una familia finita de conjuntos convexos en el plano. Si cada tres conjuntos convexos de $\mathcal{F}$ tienen un punto común, entonces todos los miembros de $\mathcal{F}$ tienen un punto en común.*

Demostración. Probaremos el teorema para el caso cuando los conjuntos convexos son polígonos. La idea de la prueba para el caso general es la misma sólo que con algunas complicaciones técnicas.

Sea $\mathcal{F}'$ la familia que consiste de todas las intersecciones de pares de polígonos. Claramente, los elementos de $\mathcal{F}'$ son de nuevo polígonos, segmentos o puntos. Sin embargo, si alguno de los elementos de $\mathcal{F}'$ es un punto X, no hay nada que hacer pues tenemos la hipótesis que cualesquiera tres elementos de $\mathcal{F}$ tienen punto en común, entonces, considerando los dos polígonos cuya intersección es X y cualquier otro polígono tenemos que la intersección de estos tres es X. Se sigue que todos los polígonos de $\mathcal{F}$ contienen a X.

Supongamos ahora que ningún elemento de $\mathcal{F}'$ es un punto. Dado que $\mathcal{F}'$ tiene una cantidad finita de elementos, existe una dirección d en la cual ningún polígono de $\mathcal{F}'$ tiene un segmento paralelo a esta dirección. Sea ℓ una línea perpendicular a d. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que ℓ es horizontal (puesto que podemos rotar el plano sin alterar la configuración). Cada miembro de $\mathcal{F}'$ se proyecta en un segmento sobre ℓ y para cada uno de estos segmentos consideremos su extremo izquierdo y su extremo derecho. De entre todos los extremos izquierdos consideremos el que está más a la derecha y nombrémosle P'. Sea $\mathcal{M} \in \mathcal{F}'$ el polígono para el cual su proyección izquierda sobre ℓ es P' y sea P el punto de $\mathcal{M}$ el cual se proyecta en P'. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ los polígonos de $\mathcal{F}$ para los cuales su intersección es $\mathcal{M}$. Consideremos ahora un polígono cualquiera de la familia $\mathcal{F}$, digamos $\mathcal{K}$ (distinto de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$). Dado que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{K} \neq \emptyset$ y las proyecciones izquierdas de $\mathcal{K} \cap \mathcal{A}$ y $\mathcal{K} \cap \mathcal{B}$ están a la izquierda de P', tenemos que sobre la línea PP' hay un punto $Z \in \mathcal{K} \cap \mathcal{A}$ y un punto $W \in \mathcal{K} \cap \mathcal{B}$. No es difícil ver, analizando las posibles posiciones de P, Z y W sobre PP', que $\mathcal{K}$ contiene al punto P. Dado que $\mathcal{K}$ era arbitrario, tenemos que todo polígono de $\mathcal{F}$ contiene a P.

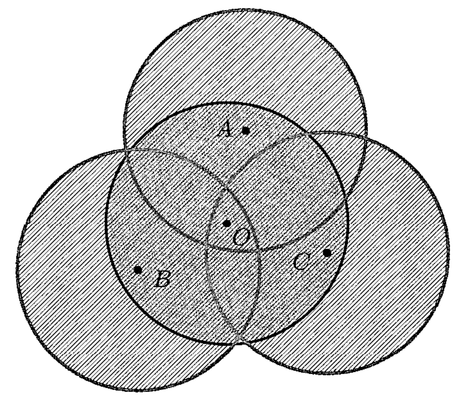
No es muy difícil ver que todas las hipótesis en el Teorema de Helly son necesarias. Por ejemplo, si consideramos todos los semiplanos cerrados de la forma $y \geq a$, para todos los enteros positivos a, podemos ver que la intersección de cualesquiera tres de estos semiplanos es no vacía. Sin embargo, no existe un punto en común a todos los semiplanos. Por otro lado, en la siguiente figura se muestran tres conjuntos convexos y un anillo (que no es convexo). Se puede observar que cualesquiera tres de esos conjuntos tienen un punto en común, pero los cuatro conjuntos no tienen ningún punto en común.



Veremos ahora cómo demostrar el siguiente problema, el cual es una versión simbólica del problema de las moscas.

Ejemplo 4. *Sea $\mathcal{P}$ un conjunto finito de puntos de manera que cualesquiera tres de los puntos se pueden cubrir con un círculo de radio* 1. *Entonces, se pueden cubrir todos los puntos de $\mathcal{P}$ con un sólo círculo de radio* 1.

Demostración. Sean A, B y C, tres de los puntos de $\mathcal{P}$. Sabemos que A, B y C, pueden ser cubiertos con un círculo de radio 1 y centro O. Entonces, si consideramos círculos de radio 1 centrados en cada uno de los puntos A, B y C, éstos contienen cada uno al punto O. Esto mismo sucede también para cualesquiera tres puntos de $\mathcal{P}$, y como los círculos son conjuntos convexos, por el Teorema de Helly se sigue que existe un punto en común a todos los círculos de radio 1 centrados en los puntos de $\mathcal{P}$. Sea Z este punto. Es fácil ver que el círculo de centro Z y radio 1 contiene a todos los puntos de $\mathcal{P}$.

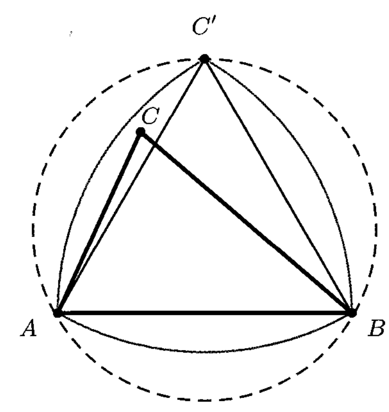


Como último ejemplo de aplicación del Teorema de Helly, veremos el siguiente teorema de Jung.

Teorema de Jung. *Todo conjunto finito de puntos de diámetro menor o igual a* 2 *está contenido en un círculo de radio* $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Recordemos que el diámetro de un conjunto es la distancia entre los dos puntos más alejados en el conjunto.

Demostración. Sea $\mathcal{S}$ un conjunto de diámetro menor o igual a 2. Consideremos la familia $\mathcal{F}$ la cual consiste en los discos de radio $\frac{2}{\sqrt{3}}$ centrados en los puntos de $\mathcal{S}$. Claramente, por el Teorema de Helly, es suficiente probar que cualesquiera tres discos de $\mathcal{F}$ se intersecan en un punto. Para esto, consideremos los puntos $A, B, C \in \mathcal{S}$ y supongamos que $2 \geq AB \geq BC \geq CA$. Consideremos el punto C' tal que el triángulo $\triangle ABC'$ es un triángulo equilátero, como se muestra en la figura. Ahora, tracemos los discos con radio AB y centros A, B y C', respectivamente. Tenemos que el triángulo $\triangle ABC'$ está contenido en la intersección de estos tres discos. No es difícil ver que el circuncírculo del triángulo $\triangle ABC'$ contiene a esta intersección. Como el circuncírculo del triángulo $\triangle ABC'$ tiene radio menor o igual que $\frac{AB}{\sqrt{3}}$, se sigue que $\triangle ABC'$ está contenido en un disco de radio $\frac{2}{\sqrt{3}}$.



Problemas

1. Sea $\mathcal{F}$ una familia de arcos circulares, todos sobre una misma circunferencia. Demuestra que si cada dos de los arcos se intersecan, entonces existe un par de puntos *antipodales* (diametralmente opuestos) tales que cada arco de la familia contiene un punto del par.

2. Sean $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ dos familias finitas de segmentos sobre una línea recta. Supongamos que todos los segmentos de $\mathcal{P}_1$ son rojos y que todos los segmentos de $\mathcal{P}_2$ son verdes. Sabemos que dado un segmento rojo y dado un segmento verde estos se intersecan. Demuestra que para alguno de los dos colores todos los segmentos de ese color se intersecan.

3. Sea $\mathcal{P}$ una familia finita de segmentos sobre una línea. Sabemos que si escogemos cualesquiera tres segmentos de $\mathcal{P}$ entonces al menos dos de ellos tienen intersección no vacía. Demuestra que existen dos puntos sobre la línea de tal manera que cualquiera de los segmentos de $\mathcal{P}$ contiene a alguno de esos puntos.

4. Sea $\mathcal{F}$ una familia finita de figuras convexas en el plano de tal manera que cada dos figuras de $\mathcal{F}$ se intersecan. Dada una línea ℓ, demuestra que existe una línea paralela a ℓ la cual interseca a todas las figuras de $\mathcal{F}$.

5. En el plano están dados una cantidad finita de rectángulos de lados paralelos a los ejes de coordenadas. Sabemos que hay rectángulos verdes y rectángulos rojos, además, cualesquiera dos rectángulos de distinto color se intersecan. Demuestra que para alguno de los colores, todos los rectángulos de ese color tienen un punto en común, o en caso contrario, que existen dos rectas perpendiculares, paralelas a los ejes de coordenadas, de tal manera que una de las rectas interseca a todos los rectángulos de un color y la otra recta interseca a todos los del otro color.

6. Sea $\mathcal{P}$ una familia finita de rectángulos de lados paralelos a los ejes de coordenadas. Sabemos que de cualesquiera tres rectángulos que escojamos dos de ellos

tienen punto en común. Demuestra que existen 4 puntos de tal manera que cada uno de los rectángulos de $\mathcal{P}$ contiene a alguno de esos puntos.

7. Considera un n-ágono convexo P, de vértices $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Consideremos copias homotéticas de P, denotadas por P_i, de manera que su centro de homotecia es el punto X_i y la razón de homotecia es $\frac{2}{3}$, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Demuestra que $\bigcap_{i=1}^{n} P_i \neq \emptyset$ y que $P \subset \bigcup_{i=1}^{n} P_i$.

8. Sea $\mathcal{P} = \{X_i + \mathcal{C}\}$ una familia finita de trasladados de una figura convexa $\mathcal{C}$ la cual tiene centro de simetría en el origen. Supongamos que cualesquiera dos trasladados tienen al menos un punto en común. Demuestra que si consideramos la familia $\mathcal{P}' = \{X_i + \frac{4}{3}\mathcal{C}\}$, es decir, la familia de copias homotéticas de $\mathcal{C}$ con razón $\frac{4}{3}$ y centradas en cada uno de los puntos X_i, entonces todos los trasladados en $\mathcal{P}'$ tienen un punto en común.

Bibliografía

1. I. Yaglom and V. Boltyanski (1961). *Convex Figures,* Holt Rinehart and Winston, New York.

2. L. Danzer, B. Grünbaum, and V. Klee (1963). *Helly's theorem and its relatives*, AMS, Proc. Sympos. Pure Math., **7**, 101–180.

3. M. Huicochea and J. Jerónimo-Castro (2009). *The strip of minimum width covering a centrally symmetric set of points*, Period. Math. Hungarica. **58**, 47-58.

4. J. Jerónimo (2007). *Line transversals to translates of unit discs*, Disc. Comput. Geom. **37**, 409-417.

5. J. Jerónimo-Castro, and L. Montejano (2010). *Chakerian-Klamkin type theorems,* Journal of Convex Analysis **17**, 643-649.

6. J. Jerónimo-Castro, and E. Roldán-Pensado (2011). *Line Transversals to Translates of a Convex Body*, Disc. Comput. Geom. **45**, 329-339.

7. S.R. Lay (1982). *Convex Sets and their Applications.* Wiley-Interscience series of texts, monographs and tracts.

8. R.J. Webster (1994). *Convexity,* Oxford Univ. Press.

Problemas de práctica

A continuación presentamos los 15 problemas de práctica seleccionados especialmente para el cuarto número del año 2014. Por ser el último número del año, el material seleccionado corresponde, en su mayoría, al nivel avanzado. Sin embargo, no te dejes impresionar por esto ya que también incluimos problemas de nivel principiante y además porque el nivel de un problema es relativo y muchas veces es posible encontrar nuevas soluciones, más sencillas y elegantes, a problemas que hasta ese momento se consideraban complicados.

Por último, te invitamos a contribuir al enriquecimiento de esta sección de la revista enviando problemas interesantes cuya solución desees compartir. Para ello ponemos a tu disposición la dirección `revistaomm@gmail.com`, donde con gusto recibiremos todas tus propuestas.

Problema 1. Determina todos los enteros positivos n tales que los números $2^n - 1$ y $2^n + 1$ sean primos.

Problema 2. Sea n un entero positivo. Dos jugadores, A y B, juegan alternadamente en un tablero de $n \times n$. En cada turno un jugador puede elegir un subtablero de $m \times m$ y borrar todos los cuadraditos de 1×1 que están en una de las diagonales de dicho subtablero. Además se tiene la restricción de que no se puede escoger un subtablero con cuadraditos borrados. Pierde el jugador que ya no puede borrar cuadraditos. Si B es el segundo en tirar, ¿quién de A y B tiene estrategia ganadora? y ¿cuál es?

Problema 3. Demuestra que en cualquier conjunto de 15 números naturales mayores que 1 y menores que 2014, en donde cada par de ellos son primos relativos, necesariamente hay un número primo.

Problema 4. Sean ABC un triángulo y P un punto sobre BC. Los puntos O, O_1 y O_2 son los circuncentros de los triángulos ABC, ABP y ACP, respectivamente. Demuestra que los circuncírculos de los triángulos OO_1O_2, BO_1O y CO_2O tienen igual radio.

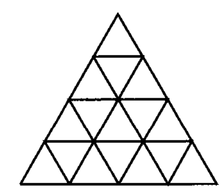
Problema 5. Encuentra todos los enteros no negativos $a \geq b \geq c \geq d$ tales que $2014 = 2^a - 2^b - 2^c - 2^d$.

Problema 6. Para cada $a = 1, 2, \ldots, 2014$, las raíces del polinomio $x^2 + x - a^2 - a$ son (α_1, β_1), (α_2, β_2), $\ldots$ $(\alpha_{2014}, \beta_{2014})$, respectivamente. Determina el valor de la suma $\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\beta_2} + \cdots + \frac{1}{\alpha_{2014}} + \frac{1}{\beta_{2014}}$.

Problema 7. Los segmentos que unen el incentro de un triángulo ABC con cada uno de sus vértices dividen al triángulo en tres triángulos. Si uno de ellos es semejante al triángulo ABC, determina los ángulos del triángulo ABC.

Problema 8. Demuestra que cada entero positivo n puede ser escrito como la diferencia de dos enteros positivos con la misma cantidad de divisores primos.

Problema 9. Considera una retícula triangular de 2014 unidades por lado (la figura es un ejemplo con 4 unidades por lado). ¿Cuántos paralelogramos puedes hallar sobre la retícula?



Problema 10. Demuestra que existe un único entero positivo formado con los dígitos del 1 al 5, que tiene 2014 dígitos y que es divisible entre 5^{2014}.

Problema 11. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cuyos vértices están sobre una circunferencia, y sea O su centro. Si las diagonales AC y BD son perpendiculares, demuestra que el área del cuadrilátero $OABC$ es igual al área del cuadrilátero $OADC$.

Problema 12. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones en los números reales positivos $\frac{1}{xy} = \frac{x}{z} + 1$, $\frac{1}{yz} = \frac{y}{x} + 1$, $\frac{1}{zx} = \frac{z}{y} + 1$.

Problema 13. La colección de números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ cumple que $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 6$ y $a_{i+1} = a_1 a_2 \cdots a_i + 1$ para cada $i = 3, 4 \ldots, n-1$. Demuestra que $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < 2$.

Problema 14. Decimos que un grupo de tres personas es *simétrico*, si cada una conoce a las otras dos o bien cada una no conoce a ninguna de las otras dos.
En una fiesta hay 20 personas y cada una conoce a exactamente otras 9 personas de la fiesta. Determina el número de grupos simétricos de tres personas que hay en la fiesta.

Problema 15. Sean x, y, z números reales positivos tales que su producto es igual a 1. Demuestra que $\frac{(y+z-1)^2}{x} + \frac{(z+x-1)^2}{y} + \frac{(x+y-1)^2}{z} \geq x + y + z$.

Soluciones a los problemas de práctica

En esta sección podrás encontrar las soluciones de los 15 problemas de la sección anterior. Sin embargo, no te recomendamos consultarla antes de tener tu propia respuesta o por lo menos no sin haberle dedicado bastante tiempo a cada problema. Ten en cuenta que la clave para mejorar tus capacidades está en la perseverancia y el esfuerzo.

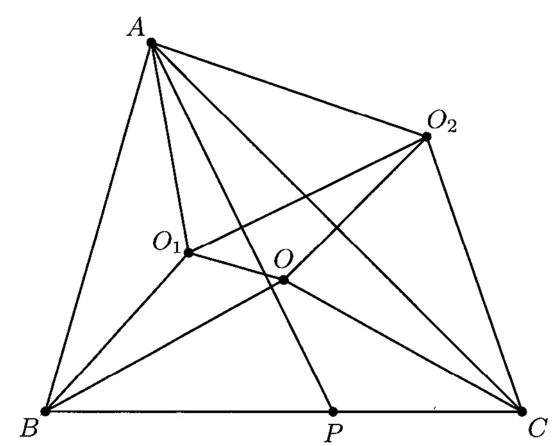
Cabe aclarar que las soluciones que aquí se presentan no son necesariamente las únicas o las mejores, tan sólo son ejemplos que muestran el tipo de razonamiento que busca estimular la olimpiada. En matemáticas, cada problema puede tener tantas soluciones correctas como ideas originales se desarrollen con creatividad y lógica. Si tú encontraste una solución diferente de las que aquí se presentan y no estás seguro de su validez o simplemente quieres compartirla con nosotros, te invitamos para que nos escribas a `revistaomm@gmail.com`.

Solución del problema 1. Si $n = 1$, entonces $2^1 - 1 = 1$ no es primo. Si $n = 2$, entonces $2^2 - 1 = 3$ y $2^2 + 1 = 5$ son primos. Supongamos que $n \geq 3$. Como los números $2^n - 1, 2^n$ y $2^n + 1$ son tres números consecutivos, alguno es divisible entre 3. Como 2^n no es divisible entre 3, uno de los números $2^n - 1$ o $2^n + 1$ debe ser divisible entre 3, y al ser mayor que 3 (pues $n \geq 3$) concluimos que no es primo. Por lo tanto, el único número que satisface las condiciones del problema es $n = 2$.

Solución del problema 2. Veamos que A tiene estrategia ganadora. En su primer turno A escoge el tablero completo y borra todos los cuadraditos de una de las diagonales. Cuando B tira A solo tendrá que reflejar ese tiro tomando como eje de reflexión la diagonal borrada en su primer turno. Claramente, A siempre podrá hacer esto puesto que B no puede escoger un subtablero con cuadraditos borrados (es decir, B se ve obligado a tirar en uno de los dos lados que determinó A en su primer turno). Por lo tanto como A puede borrar cuadraditos siempre y cuando B haya borrado en el turno anterior se sigue que el primero en no poder borrar cuadraditos es B, entonces A tiene estrategia ganadora.

Solución del problema 3. Supongamos que no hay números primos entre los escogidos. Entonces, cada número de la lista es producto de al menos dos primos no necesariamente distintos. Además, como son primos relativos por parejas, los primos que aparecen en las factorizaciones de cada número no pueden aparecer en las factorizaciones de los otros. Ahora, como $45^2 > 2014$, todo elemento debe tener algún primo menor que 45 en su factorización. Los primos menores que 45 son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41 y 43. Luego, como hay 14 números primos menores que 45, alguno debe repetirse, lo que contradice que cualesquiera dos de ellos son primos relativos.

Solución del problema 4. Supongamos que $\angle BPA = \alpha \leq 90°$. Como O_1 es el circuncentro del triángulo ABP tenemos que $\angle AO_1B = 2\angle APB = 2\alpha$. Como O y O_1 están sobre la mediatriz del segmento AB, tenemos que los ángulos $\angle OO_1A$ y $\angle BO_1O$ son iguales y junto con el ángulo $\angle AO_1B$ forman un ángulo de $360°$. Luego, $\angle OO_1A = 180° - \alpha$.
Por otro lado, como O_2 es el circuncentro del triángulo APC, tenemos que $\angle CO_2A = 2\angle CPA = 360° - 2\alpha$, por lo que $\angle AO_2C = 2\alpha$. Como tanto O como O_2 están sobre la mediatriz del segmento AC, tenemos que los ángulos $\angle AO_2O$ y $\angle OO_2C$ son iguales. Luego, $\angle AO_2O = \alpha$. Por lo tanto, $\angle OO_1A + \angle AO_2O = 180°$, por lo que el cuadrilátero AO_1OO_2 es cíclico.



Observemos que $\triangle AOO_1 \cong \triangle BOO_1$ y $\triangle AOO_2 \cong \triangle COO_2$ por ser OO_1 y OO_2 mediatrices de AB y CA, respectivamente. Entonces el circunradio del triángulo BOO_1 es el mismo que el del triángulo AOO_1 que a su vez, por el cíclico AO_1OO_2, es igual al circunradio del triángulo AOO_2 que es igual al del triángulo COO_2, con lo cual se termina el problema.

Solución del problema 5. Sean a, b, c y d números que satisfacen el problema. Si $d = 0$, entonces c tiene que ser igual a cero para que el lado derecho de la ecuación sea un número par. Sustituyendo en la ecuación obtenemos que $2016 = 2^a - 2^b = 2^b(2^{a-b} - 1)$. Como $2016 = 2^5 \cdot 63$, se tiene que $b = 5$ y $a - b = 6$, de donde $a = 11$. Así, tenemos la solución $a = 11$, $b = 5$, $c = 0$ y $d = 0$.

Si $d \geq 1$, tenemos que 2^d divide a $2^a - 2^b - 2^c - 2^d$, pero como 4 no divide a 2014, entonces $d = 1$. Sustituyendo y simplificando obtenemos que

$$1007 = 2^{a-1} - 2^{b-1} - 2^{c-1} - 1$$

y por lo tanto $1008 = 2^{a-1} - 2^{b-1} - 2^{c-1}$.
Si $b = c$, la ecuación queda

$$1008 = 2^{a-1} - 2^{b-1} - 2^{b-1} = 2^{a-1} - 2^b = 2^b(2^{a-b-1} - 1).$$

Como $1008 = 2^4 \cdot 63$, tenemos que $b = 4$ y $a - b - 1 = 6$, de donde $a = 11$ y obtenemos la solución $a = 11, b = 4, c = 4$ y $d = 1$.
Si $b \neq c$, entonces 2^{c-1} es la mayor potencia de 2 que divide al lado derecho de la ecuación anterior, lo que implica que $c - 1 = 4$. Volviendo a sustituir y simplificando obtenemos que

$$64 = 2^{a-5} - 2^{b-5}.$$

Como $a - 5 \neq b - 5$, se sigue que 2^{b-5} es la mayor potencia de 2 que divide al lado derecho, lo que implica que $b - 5 = 6$. De aquí, $b = 11$ y $2^{a-5} = 64 + 64 = 128 = 2^7$, y por lo tanto $a = 12$. Así tenemos la solución $a = 12, b = 11, c = 5$ y $d = 1$.

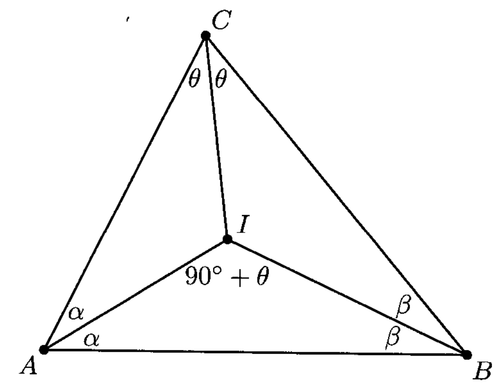
Solución del problema 6. Por ser α_i, β_i raíces del polinomio $x^2 + x - i^2 - i$ para cada i desde 1 hasta 2014, se tiene que $(x - \alpha_i)(x - \beta_i) = x^2 + x - i^2 - i$. Por lo tanto, comparando los coeficientes se tiene que $1 = -(\alpha_i + \beta_i)$ y $\alpha_i\beta_i = -i^2 - i$. Luego,

$$\frac{1}{\alpha_i} + \frac{1}{\beta_i} = \frac{\alpha_i + \beta_i}{\alpha_i\beta_i} = \frac{1}{i^2 + i} = \frac{1}{i(i+1)}.$$

De esto se sigue que

$$\sum_{i=1}^{2014} \frac{1}{\alpha_i} + \frac{1}{\beta_i} = \sum_{i=1}^{2014} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{2014} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{2015}\right) = \frac{2014}{2015}.$$

Solución del problema 7. Sean 2α, 2β y 2θ los ángulos internos del triángulo ABC. Supongamos que el triángulo AIB es semejante al original. Como la suma de los ángulos internos del triángulo ABC es igual a $180°$, tenemos que $\alpha + \beta + \theta = 90°$. Además, como en el triángulo AIB tenemos los ángulos α y β, el tercer ángulo debe ser igual a $90° + \theta$.



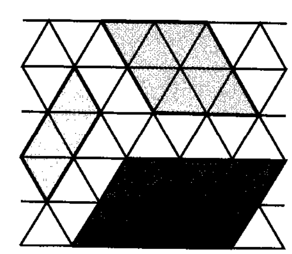
Como $\theta < 90°$, no es posible que $90° + \theta$ sea igual a 2θ. Luego, $90° + \theta$ debe ser igual a 2α o a 2β. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $90° + \theta = 2\alpha$. Como los ángulos β y 2β no pueden ser iguales, se tiene que tener que $\beta = 2\theta$, por lo que $\alpha = 2\beta$. Luego

$$8\theta = 4\beta = 2\alpha = 90° + \theta$$

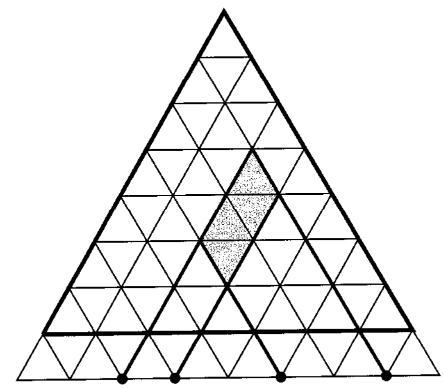
de donde $\theta = (\frac{1}{7})90°$, $\beta = (\frac{2}{7})90°$ y $\alpha = (\frac{4}{7})90°$, de donde los ángulos del triángulo ABC son $(\frac{1}{7})180°$, $(\frac{2}{7})180°$ y $(\frac{4}{7})180°$.

Solución del problema 8. Si $n = 1$, basta considerar la diferencia $3 - 2$. Si n es par, basta considerar la diferencia $2n - n$. Si $n > 1$ es impar, consideremos la diferencia $qn - (q-1)n$, donde q es el primo impar más pequeño que no divide a n. El número qn tiene exactamente un divisor primo más que n (dicho primo es q). Por otro lado, $q - 1$ es par, por lo que $(q-1)n$ tiene los divisores primos de n más el primo 2. Por la definición de q, todos los divisores primos impares de $q - 1$ también son divisores de n y terminamos.

Solución del problema 9. Dividamos a todos los paralelogramos en tres clases dependiendo de su orientación, es decir, dependiendo de a qué par de lados del triángulo es paralelo. Observemos que hay una correspondencia entre las tres clases: cada paralelogramo de una de ellas corresponde a un paralelogramo en las otras mediante una rotación. Por lo tanto, basta contar cuántos paralelogramos hay en cada clase y luego multiplicar por 3 para obtener el resultado final.



Finalmente, observemos que podemos asignar a cada paralelogramo de una clase, 4 puntos sobre el lado inferior de una retícula de $2014 + 1 = 2015$ unidades por lado, siendo este lado el que no es paralelo a los lados del paralelogramo en cuestión. De manera inversa, cada elección de 4 puntos sobre este lado, define un único paralelogramo de esta clase. Por lo tanto, hay $\binom{2016}{4}$ paralelogramos en una clase (es 2016 porque la retícula triangular cuyo lado mide 2015 unidades tiene 2016 puntos). Por lo tanto, la respuesta es $3\binom{2016}{4} = 3 \cdot \frac{2016(2015)(2014)(2013)}{24} = \frac{2016(2015)(2014)(2013)}{8}$ paralelogramos.



Solución del problema 10. Demostraremos que para cada entero positivo k hay un único entero positivo con k dígitos, cada uno de los cuales es un dígito del 1 al 5, que es múltiplo de 5^k. Lo haremos por inducción en k. Si $k = 1$ tenemos que el único número que cumple es el 5. Supongamos que el resultado es cierto para cierto entero positivo n y veamos que es cierto para $n + 1$.
Consideremos un número con $n + 1$ dígitos $a_{n+1}a_n \dots a_2a_1$, cada uno de los cuales es un dígito del 1 al 5 y tal que es múltiplo de 5^{n+1}. Como 5^n divide a

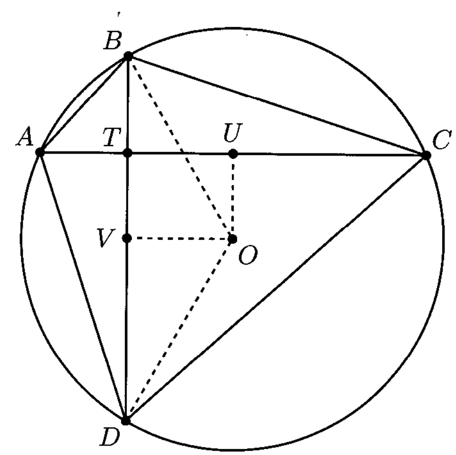
$$10^n a_{n+1} + a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1$$

tenemos que 5^n divide a $a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1$. Como cada uno de estos n dígitos está entre $1, 2, 3, 4$ y 5, por la hipótesis inductiva, este número existe y es único.
Sea $a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 = 5^n A$ para cierto entero positivo A. Tenemos que 5^{n+1} divide a $10^n a_{n+1} + 5^n A$ si y solo si 5 divide a $2^n a_{n+1} + A$. Si consideramos la ecuación

$$2^n a_{n+1} + A \equiv 0 \pmod 5,$$

como $2^n \not\equiv 0 \pmod 5$, tenemos que hay una única solución a_{n+1} entre $1, 2, 3, 4$ y 5, lo que completa la inducción.

Solución del problema 11. Sean U y V los pies de las perpendiculares desde O sobre AC y BD, respectivamente. Sea T el punto de intersección de AC con BD. Sin pérdida de generalidad, supongamos que O está dentro del triángulo DTC.



El área del cuadrilátero $ABOD$ es igual a la suma de las áreas de los triángulos ABD y OBD. Pero el área de triángulo ABD es igual a $\frac{BD \cdot AT}{2}$ y el área del triángulo BOD es igual a $\frac{BD \cdot OV}{2}$. Como $OUTV$ es un rectángulo, $OV = UT$. Por tanto, el área del cuadrilátero $ABOD$ es igual a

$$\begin{aligned}(ABOD) &= \frac{BD \cdot AT}{2} + \frac{BD \cdot OV}{2} = \frac{BD \cdot AT}{2} + \frac{BD \cdot TU}{2} \\ &= \frac{BD(AT + TU)}{2} = \frac{BD \cdot AU}{2}.\end{aligned}$$

El área del cuadrilátero $BODC$ es igual al área del triángulo BDC menos el área del triángulo BOD. Pero el área del triángulo BCD es igual a $\frac{BD \cdot TC}{2}$ y el área del triángulo BOD es igual a $\frac{BD \cdot OV}{2}$. Luego, el área del cuadrilátero $BODC$ es igual a

$$(BODC) = \frac{BD \cdot TC}{2} - \frac{BD \cdot OV}{2} = \frac{BD \cdot TC}{2} - \frac{BD \cdot TU}{2} = \frac{BD \cdot UC}{2}.$$

Sin embargo, como O es centro y OU es una perpendicular a la cuerda AC, la divide por su punto medio. Por tanto, $AU = \frac{AC}{2} = UC$ y concluimos que las áreas de los cuadriláteros $ABOD$ y $BODC$ son iguales.

Solución del problema 12. El sistema es equivalente al sistema

$$z = x^2 y + xyz, \quad x = y^2 z + xyz, \quad y = z^2 x + xyz.$$

Luego,

$$z - x^2 y = x - y^2 z = y - z^2 x.$$

Si $x = y$, entonces $y^2 z = z^2 x$ y por lo tanto $x^2 z = z^2 x$. De aquí, $xz(x - z) = 0$ y como x, z son positivos, obtenemos que $x = z$. Por lo tanto, $x = y = z$. De manera análoga, $x = z$ o $y = z$ implica que $x = z = y$. Luego, si cualesquiera dos de x, y, z

son iguales, entonces todos son iguales. Supongamos que no hay dos de x, y, z iguales. Podemos suponer que x es el mayor de los tres de manera que $x > y$ y $x > z$. Tenemos dos posibilidades: $y > z$ o $z > y$.
Supongamos que $x > y > z$. De las relaciones $z - x^2y = x - y^2z = y - z^2x$ obtenemos que

$$y^2z > z^2x > x^2y.$$

De aquí, $y^2z > z^2x$ y $z^2x > x^2y$ implican que $y^2 > zx$ y $z^2 > xy$. Así,

$$(y^2)(z^2) > (zx)(xy).$$

Luego, $yz > x^2$. Esto es una contradicción pues $z < y < x \Rightarrow yz < y^2 < x^2$. De manera análoga obtenemos una contradicción si $x > z > y$. La única posibilidad es entonces $x = y = z$ y en este caso obtenemos la ecuación $x^2 = \frac{1}{2}$. Como $x > 0$, obtenemos $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Solución del problema 13. Consideremos la sucesión $b_1 = 1$, y $b_i = i(i-1)$ para $2 \leq i \leq n$. Como $\frac{1}{i(i-1)} = \frac{1}{i-1} - \frac{1}{i}$, se tiene que

$$\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots+\frac{1}{b_n} = 1+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) = 1+1-\frac{1}{n} < 2.$$

Luego, basta demostrar que $a_i \geq b_i$ para $1 \leq i \leq n$. Es fácil ver esto para $i = 1, 2, 3$ y 4. Claramente se tiene que $a_i \geq i$, por lo que para $i \geq 5$ se tiene que

$$a_i = a_1a_2\cdots a_{i-1} + 1 \geq 2(i-2)(i-1) + 1,$$

pues entre los factores $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}$ se tienen los factores 2, $i-2$ e $i-1$, y los tres son diferentes. Luego, basta demostrar que

$$2(i-2)(i-1) + 1 \geq i(i-1),$$

lo cual es equivalente a $i^2 + 5 \geq 5i$ y esta es cierta pues $i^2 + 5 > i^2 \geq 5i$ si $i \geq 5$. Esto termina la demostración.

Solución del problema 14. El número total de grupos de 3 personas en la fiesta es $\binom{20}{3} = \frac{20\cdot 19\cdot 18}{1\cdot 2\cdot 3} = 1140$. Sean a la cantidad de grupos simétricos y b la cantidad de grupos no simétricos. Entonces, $a + b = 1140$.
Fijamos una persona A y hacemos la lista de grupos de las personas A, B, C (A participa en todos los grupos de la lista) tales que o bien A conoce a B y a C, o A no conoce a ninguno de los otros dos. Contemos el número de ternas (A, B, C) tales que A conoce a B y C, o A no conoce a B ni a C. Para el caso en que A conoce a B y a C, el par B, C se puede elegir de $\binom{9}{2} = \frac{9(8)}{2} = 36$ maneras, pues A tiene exactamente 9 conocidos. Para el caso en el que A no conoce ni a B ni a C, el par B, C se puede elegir de $\binom{10}{2} = \frac{10(9)}{2} = 45$ maneras, pues A no conoce a exactamente $20-1-9 = 10$ personas en la fiesta. En total la lista de los grupos de tres personas que se ha hecho contiene $36+45 = 81$ grupos. Si se hace lo mismo para cada persona de la fiesta, el resultado es $20\cdot 81 = 1620$ grupos de 3 personas. Entre estos 1620 grupos de 3 personas,

figura cada uno de los 1140 posibles grupos de 3 personas. Notemos que cada grupo simétrico figura tres veces: si todos los integrantes del grupo A, B, C conocen a los otros dos, entonces el grupo A, B, C figura en la lista de cada uno de sus integrantes, y lo mismo ocurre con un grupo en el que nadie conoce a nadie. Por otra parte, un grupo que no es simétrico figura exactamente una vez. Se deduce que $3a + b = 1620$.
Dado que $a + b = 1140$ y $3a + b = 1620$, obtenemos $2a = (3a + b) - (a + b) = 1620 - 1140 = 480$, de donde $a = 240$. Por lo tanto, en la fiesta hay 240 grupos simétricos de tres personas.

Solución del problema 15. Aplicando la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica a los números $\frac{(y+z-1)^2}{x}$ y x tenemos que

$$\frac{(y+z-1)^2}{x} + x \geq 2|y+z-1|.$$

Si $y + z - 1 \geq 0$, se tiene que $|y+z-1| = y+z-1$. Si $y+z-1 < 0$, se tiene que $|y+z-1| > 0 > y+z-1$. De cualquiera manera, podemos concluir que

$$\frac{(y+z-1)^2}{x} + x \geq 2(y+z-1).$$

Análogamente obtenemos que $\frac{(z+x-1)^2}{y} + y \geq 2(z+x-1)$ y $\frac{(x+y-1)^2}{z} + z \geq 2(x+y-1)$. Sumando las tres desigualdades obtenemos que

$$\frac{(y+z-1)^2}{x} + \frac{(z+x-1)^2}{y} + \frac{(x+y-1)^2}{z} \geq 3(x+y+z) - 6.$$

Si demostramos que $3(x+y+z) - 6 \geq x+y+z$, habremos acabado. Esta última desigualdad es equivalente a $x+y+z \geq 3$, lo cual es cierto, pues por la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica aplicada a los números x, y y z, se tiene que $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz} = 1$, que era justo lo que faltaba probar.

Problemas de Entrenamiento

Esta es la sección interactiva de la revista y su construcción sólo es posible con la participación entusiata de todos sus lectores. Los siguientes 10 problemas que presentamos carecen de solución pues están esperando a que tú los resuelvas. Acepta el reto y resuelve uno o todos los *Problemas de Entrenamiento* y una vez que lo logres, envíanos tus soluciones cuanto antes para que puedan salir publicadas con tu nombre impreso.

Las soluciones de los problemas de esta sección se escogerán de entre las participaciones recibidas por parte de la comunidad olímpica de todo el país.

Con el fin de dar tiempo a nuestros lectores para la redacción y envío de sus trabajos, las soluciones de los problemas presentados en cada número de la revista, se publican 3 números después. Para ello, ponemos a tu disposición nuestra dirección: `revistaomm@gmail.com` y ten la seguridad de que tan pronto recibamos tu contribución, inmediatamente nos pondremos en contacto contigo para comentar y en su caso, publicar tu trabajo.

Problemas de Entrenamiento.
Año 2014 No. 4.

Problema 1. Sea ABC un triángulo con incentro I, y sean M, N y L los puntos medios de AB, BC y CA, respectivamente. Si D es el punto de tangencia del incírculo del triángulo ABC con BC, demuestra que NL, AD y MI son concurrentes.

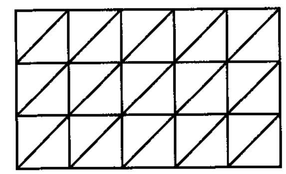
Problema 2. Sea p un número primo. Encuentra todos los enteros positivos a y b tales que $a^3(b^2-p)=a^3+b^2-1$.

Problema 3. Los vértices de un polígono regular con 2005 lados se colorean de rojo, blanco o azul. Cuando dos vértices consecutivos son de diferente color, es permitido cambiar ambos al tercer color.

1. Demuestra que es posible que después de una cantidad finita de cambios, todos los vértices tengan el mismo color.

2. ¿Este color queda determinado por la coloración inicial?

Problema 4. Considera una cuadrícula de $m \times n$ en la cual se han dibujado las diagonales principales de cada casilla. La siguiente figura ilustra el caso con $m = 3$ y $n = 5$.



Demuestra que el número de caminos desde la esquina inferior izquierda hasta la esquina superior derecha que solo se mueven hacia arriba, hacia la derecha y por las diagonales es

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \binom{n+k}{m}.$$

Problema 5. Sea U el incentro del triángulo ABC y sean O_1, O_2 y O_3 los circuncentros de los triángulos BUC, CUA y AUB, respectivamente. Demuestra que los circuncentros de los triángulos ABC y $O_1O_2O_3$ coinciden.

Problema 6. Encuentra todas las soluciones enteras de la ecuación $a!b! = a! + b! + c!$.

Problema 7. Los enteros positivos se pintan con dos colores. Demuestra que para cada entero $k \geq 2$ existen dos enteros a y b coloreados del mismo color de manera que la suma $a + b$ es una potencia k-ésima de un entero.

Problema 8. Sea n un entero positivo. Se tiene una cuadrícula de $5 \times n$, donde cada casilla de 1×1 se ha pintado de rojo o azul. Determina el menor entero positivo n tal que, para cualquier coloración de la cuadrícula, es posible escoger tres renglones y tres columnas tales que las 9 casillas en su intersección tienen todas el mismo color.

Problema 9. Sea ABC un triángulo con todos sus ángulos mayores a $45°$, y sean D, E y F los pies de las alturas desde A, B y C sobre los lados BC, AC y AB, respectivamente. Sean a , b y c las rectas que contienen a los lados BC, AC y AB respectivamente. Denotemos por X_i el punto de reflexión de X sobre la recta i. Sean A' el punto de intersección de D_bF_b con D_cE_c, B' el punto de intersección de E_aF_a y E_cD_c, y C' el punto de intersección de F_bD_b y F_aE_a. Demuestra que el cicuncentro del triángulo ABC es el incentro del triángulo $A'B'C'$.

Problema 10. Sean a, b y c números reales y sea

$$X = a + b + c + 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca}.$$

Demuestra que $X \geq \text{máx}\{3a, 3b, 3c\}$ y que uno de los números

$$\sqrt{X - 3a}, \quad \sqrt{X - 3b}, \quad \sqrt{X - 3c}$$

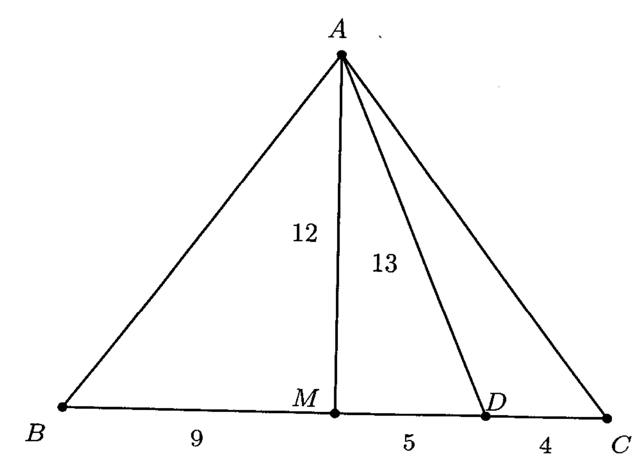
es la suma de los otros dos.

Soluciones a los Problemas de Entrenamiento. Año 2014 No. 1.

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa 1, año 2014. Recuerda que en el siguiente número de la revista aparecerán las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa 2, año 2014, por lo que aún tienes tiempo de enviarnos tus soluciones.

Problema 1. En un triángulo ABC, sea D un punto sobre el segmento BC tal que $BD = 14\,cm$, $AD = 13\,cm$ y $DC = 4\,cm$. Sabiendo que $AB = AC$, calcula el área del triángulo ABC.

Solución. Sabemos que $BC = BD + DC = 18\,cm$. Para calcular el área del triángulo ABC, calcularemos la longitud de la altura desde A. Sea M el punto medio de BC. Como $AB = AC$, se tiene que AM es la altura desde A. Esto significa que el triángulo ΔADM es rectángulo, con hipotenusa AD. Como $BC = 18\,cm$, se tiene que $BM = MC = 9\,cm$. Por ello, $MD = MC - DC = 9 - 4 = 5\,cm$.



Por el teorema de Pitágoras, $AD^2 = AM^2 + MD^2$, es decir, $13^2 = AM^2 + 5^2$. Luego, $169 = AM^2 + 25$, de donde $AM^2 = 144$. Por lo tanto, $AM = 12\,cm$. En consecuencia, el área del triángulo ABC es

$$(\Delta ABC) = \frac{AM \cdot BC}{2} = \frac{12 \cdot 18}{2} = 108\,cm^2.$$

Problema 2. Dado un número natural N, multiplicamos todos sus dígitos. Repetimos este proceso con el número obtenido cada vez hasta obtener un número de un solo dígito, al cual le llamaremos el *primitivo* de N. Por ejemplo, como $3 \cdot 2 \cdot 7 = 42$ y $4 \cdot 2 = 8$, concluimos que el primitivo de 327 es 8. Encuentra el mayor número natural tal que todos sus dígitos son diferentes y su primitivo es impar.

Solución. Puesto que el dígito de las unidades de un número par es también par, y el producto de un número par por cualquier otro resulta en un número par, se tiene que el primitivo de un número par es de nuevo un número par. Más aún, si un número tiene cualquier dígito par, su primitivo es par. Por ello, el número que buscamos consta de los dígitos 1, 3, 5, 7, 9. Además, el número que buscamos tiene todos sus dígitos diferentes, por lo que debe tener a lo más cinco dígitos. El número mayor posible es 97531, pero el producto de sus dígitos es 945, el cual tiene un dígito par y por tanto su primitivo es par. De hecho, cualquier número formado por la permutación de los dígitos 1, 3, 5, 7, 9 tendrá el mismo primitivo, por lo que el número que buscamos tendrá a lo más 4 dígitos.

El mayor número de cuatro dígitos formado por los dígitos 1, 3, 5, 7, 9 es el que no tiene al 1, es decir, 9753, pero el producto de sus dígitos es otra vez 945 y su primitivo es exactamente el mismo que el del número anterior. Si ahora quitamos el 3, el siguiente número más grande de cuatro dígitos (formado con los dígitos $1, 3, 5, 7, 9$) es el 9751. Puesto que $9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 1 = 315$, $3 \cdot 1 \cdot 5 = 15$ y $1 \cdot 5 = 5$, se sigue que el primitivo de 9751 es 5, que es impar, por lo que 9751 es el número buscado.

Problema 3. En un pizarrón están escritos los números $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots, 2014^2$. Francisco y Sergio borran alternadamente un número del pizarrón, hasta que sólo quedan dos números. Si la diferencia entre ellos es múltiplo de 2015, gana Sergio y en caso contrario, gana Francisco. Si Francisco es el primero en jugar, ¿quién tiene estrategia ganadora? (se dice que un jugador tiene estrategia ganadora si puede asegurar su victoria sin importar cómo juegue su rival).

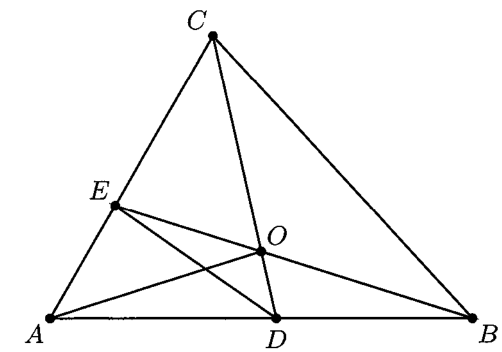
Solución. Consideremos las parejas de números

$$(1^2, 2014^2), (2^2, 2013^2), (3^2, 2012^2), \ldots, (1011^2, 1014^2), (1012^2, 1013^2),$$

que consisten de los números cuya suma (sin los cuadrados) es 2015. De la identidad $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, se tiene que la diferencia de los números de cada pareja es múltiplo de 2015. Así, si alguna de esas parejas queda al final, gana Sergio. Veamos que es precisamente Sergio quien posee estrategia ganadora, pues puede asegurar que al final quede una de estas parejas. Sabemos que en cada ronda, Francisco borra un número y seguidamente Sergio. La estrategia ganadora de Sergio consiste en borrar en cada ronda el número que es pareja del que acaba de borrar Francisco. Así, Sergio asegura que los números que quedan escritos en el pizarrón después de cada ronda están siempre con su pareja. Por ello, después de la última ronda, los dos números escritos serán los de alguna pareja de las anteriores, por lo que su diferencia será múltiplo de 2015 y Sergio gana.

Problema 4. Un triángulo ABC es tal que su ángulo en A es de $60°$. Sean D y E puntos sobre los lados AB y AC respectivamente de manera que $BD = DE = EC$. Sea O el punto de intersección de BE y DC. Demuestra que O es el circuncentro del triángulo ABC.

Solución. Denotemos por $\angle EBA = \alpha$ y $\angle DCA = \beta$. Como los triángulos DEC y BDE son isósceles se tiene que $\angle DEB = \alpha$ y $\angle CDE = \beta$.



Por ángulos externos, tenemos $\angle DEA = 2\alpha$ y $\angle EDA = 2\beta$. Por suma de ángulos en el triángulo ADE tenemos que $2\alpha + 2\beta + 60° = 180°$, de donde podemos deducir que $\alpha + \beta = 60°$. De este modo, $\angle DOE = 180° - \alpha - \beta = 120°$. Así, el cuadrilátero $ADOE$ tiene dos ángulos opuestos que suman $180°$ y por tanto es cíclico.
Entonces, $\angle OAE = \beta = \angle OCA$. Esto nos dice que el triángulo OCA es isósceles, de modo que $OC = OA$. Análogamente concluimos que $OB = OA$ y por lo tanto, O es el circuncentro del triángulo ABC.

Problema 5. Demuestra que:

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{1^2}+\sqrt[3]{1\cdot 2}+\sqrt[3]{2^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3\cdot 4}+\sqrt[3]{4^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{999^2}+\sqrt[3]{999\cdot 1000}+\sqrt[3]{1000^2}} > \frac{9}{2}$.

b) $\frac{1}{\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2\cdot 3}+\sqrt[3]{3^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4^2}+\sqrt[3]{4\cdot 5}+\sqrt[3]{5^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{998^2}+\sqrt[3]{998\cdot 999}+\sqrt[3]{999^2}} < \frac{9}{2}$.

Solución. Sean $A = \frac{1}{\sqrt[3]{1^2}+\sqrt[3]{1\cdot 2}+\sqrt[3]{2^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3\cdot 4}+\sqrt[3]{4^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{999^2}+\sqrt[3]{999\cdot 1000}+\sqrt[3]{1000^2}}$ y $B = \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2\cdot 3}+\sqrt[3]{3^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4^2}+\sqrt[3]{4\cdot 5}+\sqrt[3]{5^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{998^2}+\sqrt[3]{998\cdot 999}+\sqrt[3]{999^2}}$.
Notemos primero que $A > B$, pues comparando término a término de izquierda a derecha vemos que cada sumando de A es mayor a cada sumando de B y además A tiene un sumando más.
Cada uno de los sumandos de A o B es de la forma $\frac{1}{\sqrt[3]{j^2}+\sqrt[3]{j(j+1)}+\sqrt[3]{(j+1)^2}}$. Usando

la relación $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$, obtenemos

$$\frac{1}{\sqrt[3]{j^2}+\sqrt[3]{j(j+1)}+\sqrt[3]{(j+1)^2}} = \frac{\sqrt[3]{j+1}-\sqrt[3]{j}}{j+1-j} = \sqrt[3]{j+1}-\sqrt[3]{j}.$$

Así,

$$\begin{aligned} A+B &= \sum_{j=1}^{999}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{j^2}+\sqrt[3]{j(j+1)}+\sqrt[3]{(j+1)^2}}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{999}\left(\sqrt[3]{j+1}-\sqrt[3]{j}\right) = \sqrt[3]{1000}-\sqrt[3]{1} = 10-1 = 9. \end{aligned}$$

De esta forma, tenemos que $A+B=9$ y $A>B$, con lo cual necesariamente $A > \frac{9}{2}$ y $B < \frac{9}{2}$.

Problema 6. La FIFA desea cambiar la modalidad del mundial. En el torneo participarán 32 equipos, los juegos de cada ronda se decidirán por sorteo y en cada partido entre dos equipos exactamente uno, el ganador (no hay empates), pasará a la siguiente ronda. La FIFA tiene un ranking de los 32 equipos ordenándolos de mejor a peor. En la primera ronda del torneo se realizarán 16 partidos y los 16 ganadores pasan a la segunda ronda, en la segunda ronda se jugarán 8 partidos y los 8 equipos ganadores pasan a la tercera ronda así hasta que en la cuarta ronda habrá 2 partidos y los ganadores jugarán la final. Supongamos que si un equipo A está en mejor posición en el ranking de la FIFA que un equipo B entonces si A y B juegan, A le gana a B, por ejemplo el equipo 1 en el ranking siempre gana. Bajo esta suposición, ¿cuál es el peor equipo que puede disputar la final?

Solución. Numeremos los equipos de 1 a 32 de mejor a peor. Uno de los finalistas viene de una "llave" en la cual jugaron 16 equipos y el otro semifinalista de la otra, con los 16 equipos restantes. Así, para que un equipo llegue a la final, tiene que ser el mejor de su llave, y por tanto debe de ser capaz de ganarle a al menos 15 equipos. El peor equipo que puede hacer eso es el equipo 17 (el equipo 18 solo le puede ganar a 14 equipos). Veamos que en efecto hay una configuración que le permita ganar.
Notemos que el equipo 1 siempre es semifinalista, pues de hecho gana el mundial. Si en la llave del equipo 1 juegan los equipos de 1 a 16, entonces el mejor equipo en la otra llave es el 17 y por tanto gana todos sus partidos y llega a la final. Esto nos muestra que el equipo 17 puede llegar a la final.

Problema 7. Determina el mayor número real m tal que $(x^2+y^2)^3 > m(x^3+y^3)^2$ para cualesquiera números reales positivos x, y.

Solución. Dividiendo la desigualdad entre y^6 obtenemos que $(\frac{x^2}{y^2}+1)^3 > m(\frac{x^3}{y^3}+1)^2$. Luego, si $z = \frac{x}{y}$, la desigualdad se convierte en la desigualdad $(z^2+1)^3 > m(z^3+1)^2$, la cual es equivalente a la desigualdad

$$(1-m)z^6 + 3z^4 + (3-2m)z^3 + 1 - m > 0$$

para cualquier número real positivo z. Haciendo z muy cercano a cero, concluimos que $1-m \geq 0$, esto es, $m \leq 1$. Si tomamos $m = 1$, la desigualdad $(x^2+y^2)^3 > (x^3+y^3)^2$ es equivalente a la desigualdad $x^2y^2((x-y)^2 + 2x^2 + 2y^2) > 0$, la cual es claramente verdadera. Por lo tanto, la respuesta es $m = 1$.

Problema 8. Sea m un entero positivo. Demuestra que

$$\sum_{n=0}^{m} \frac{(2m)!}{(n!(m-n)!)^2}$$

es el cuadrado de un entero.

Solución. Tenemos que

$$\frac{(2m)!}{(n!(m-n)!)^2} = \frac{(m!)^2}{(n!(m-n)!)^2} \cdot \frac{(2m)!}{(m!)^2} = \binom{m}{n}^2 \cdot \binom{2m}{m}.$$

Luego,

$$\sum_{n=0}^{m} \frac{(2m)!}{(n!(m-n)!)^2} = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n}^2 \cdot \binom{2m}{m} = \binom{2m}{m} \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n}^2.$$

Demostraremos que

$$\sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n}^2 = \binom{2m}{m}$$

usando un argumento combinatorio.

Consideremos $2m$ pelotas, numeradas del 1 al $2m$. Pintemos las pelotas numeradas del 1 al m de color azul, y a las numeradas del $m+1$ al $2m$ de color rojo. Podemos elegir m pelotas de las $2m$ pelotas de $\binom{2m}{m}$ formas. Por otra parte, esto también lo podemos hacer eligiendo primero n pelotas azules, con $0 \leq n \leq m$, y luego eligiendo $m-n$ pelotas rojas. De manera equivalente, podemos elegir n pelotas azules para incluir, y n pelotas rojas para no incluir. Luego, el número de formas en las que podemos elegir m pelotas es igual a

$$\sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n}^2.$$

Luego, esta suma es igual a $\binom{2m}{m}$ y por lo tanto $\sum_{n=0}^{m} \frac{(2m)!}{(n!(m-n)!)^2} = \binom{2m}{m}^2$ es el cuadrado de un entero.

Problema 9. Todos los miembros de un senado son divididos en S comisiones. Cada comisión tiene al menos 5 senadores y cualesquiera dos comisiones tienen un número diferente de senadores. Después de la primera sesión se crean nuevas comisiones (también cada una con al menos 5 senadores) y algunos senadores se quedan sin estar en alguna comisión. Resultó que cualesquiera dos senadores que estaban en una misma comisión, ya no están en la misma comisión. Demuestra que al menos $4S + 10$

senadores se quedaron fuera de las comisiones. Y muestra cómo puede darse exactamente que $4S + 10$ senadores se queden fuera.

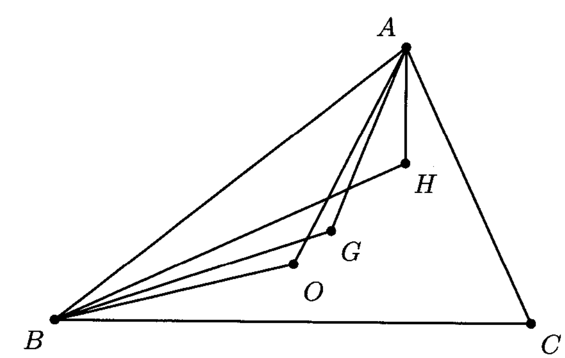
Solución. Sean $c_1, c_2, \ldots, c_S$ los números de miembros en las comisiones originales con $5 \leq c_1 < c_2 < \cdots < c_S$. Luego, $c_k \geq k + 4$ para cada $1 \leq k \leq S$. Si N es el total de miembros tenemos que $N = c_1 + c_2 + \cdots + c_S \geq 4S + (1 + 2 + \cdots + S) = 4S + \frac{S(S+1)}{2}$.
Como cada nueva comisión tiene a lo más un senador de cada c_i se tiene que cada una tiene a lo más S miembros. Luego, el número M de senadores en las segundas comisiones cumple que $M \leq 5 + 6 + \cdots + S = \frac{S(S+1)}{2} - 10$. De las dos desigualdades anteriores tenemos que,

$$N - M \geq \left(4S + \frac{S(S+1)}{2}\right) - \left(\frac{S(S+1)}{2} - 10\right) = 4S + 10,$$

por lo que al menos $4S + 10$ senadores se quedaron fuera de las nuevas comisiones.
Para la igualdad, podemos crear las primeras comisiones con exactamente $5, 6, \ldots, S$ senadores y para la segunda, tomar estas S comisiones, quitarle a cada una 4 miembros, los cuales quedarán fuera. Luego, las nuevas comisiones se formarán tomando sucesivamente un senador de cada una de estas comisiones. La primera nueva comisión tendrá S senadores, la segunda $S - 1$ y continuamos hasta formar la última comisión con 5 senadores. Luego, quedan fuera otros $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ senadores.

Problema 10. Sea ABC un triángulo acutángulo con gravicentro G tal que $\angle AGB = 2\angle ACB$. Demuestra que $\angle ACB \geq 60°$.

Solución. Sean O y H el circuncentro y el ortocentro del triángulo ABC, respectivamente. Como también se tiene que $\angle AOB = 2\angle ACB$ se tiene que $\angle AGB = \angle AOB$ y G está en el circuncírculo del triángulo AOB.



Por otro lado, como O, G y H están en ese orden sobre la recta de Euler[2], se tiene que H queda fuera o sobre el circuncírculo del triángulo AOB, de donde $\angle AHB \leq \angle AOB$. Es fácil demostrar que $\angle AHB = 180° - \angle ACB$. Luego, $180° - \angle ACB \leq 2\angle ACB$, de donde $\angle ACB \geq 60°$.

[2] Ver en el apéndice el teorema 32.

Concursos Estatales

Olimpiada de Matemáticas en Yucatán

El concurso estatal de la Olimpiada de Matemáticas en Yucatán se lleva a cabo en el mes de abril y participan alumnos de primaria, secundaria y bachillerato, y es la cumbre de un proceso selectivo que dura más de 6 meses y que inicia desde septiembre del año anterior.

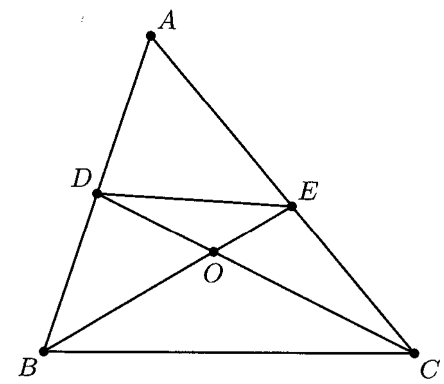
En Yucatán la Olimpiada de Matemáticas tiene una de las coberturas más extensas del pís: anualmente alrededor de 150,000 estudiantes presentan algún examen selectivo de la Olimpiada de Matemáticas en sus diferentes modalidades. Los procesos selectivos de secundaria y primaria constan de cuatro fases cada uno, de donde surgen las selecciones que participan en diferentes competencias.

Como parte de dicho proceso, los 100 mejores estudiantes de secundaria y primaria participan en el Concurso Estatal junto con los estudiantes de bachillerato, siendo en total alrededor de 400 o 500 participantes por año en los tres niveles. Del concurso estatal se obtiene una preselección de entre 15 y 20 alumnos, los cuales entrenan otros seis meses y de donde surge finalmente la selección que asiste al Concurso Nacional.

A continuación presentamos los problemas del concurso estatal de la 28^a Olimpiada de Matemáticas en Yucatán. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

Problema 1. Encuentra dos potencias de tres que tengan más de tres dígitos y que terminen en 001.

Problema 2. En un triángulo ABC como el de la figura, el $\angle BAC$ mide $60°$ y $BD = DE = EC$. Demuestra que O es el centro de la circunferencia que pasa por los puntos A, B y C.



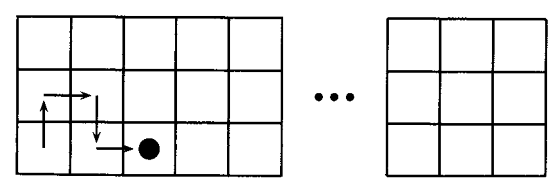
Problema 3. Encuentra todas las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$x = (y+z)^3$$
$$y = (z+x)^3$$
$$z = (x+y)^3.$$

Problema 4. ¿Es posible encontrar un número natural que sea una potencia de 2, y que al reordenar sus dígitos se obtenga otra potencia de 2? Justifica tu respuesta.

Problema 5. El hexágono $ABCDEF$ tiene todos sus lados iguales. Además, AB es paralelo a DE, BC es paralelo a EF y CD es paralelo a FA. Supongamos que $\angle FAB = 140°$ y $\angle BCD = 120°$. Sea P el punto de intersección de AC con BF, y sea Q el punto de intersección de CE con DF. Demuestra que CF es perpendicular a PQ.

Problema 6. Drini tiene un tablero que mide 3 casillas de alto por 2014 casillas de ancho y mueve una ficha por el tablero de acuerdo a la siguiente regla:
Si la ficha está en una casilla, en el siguiente paso, se puede mover a una casilla inmediatamente vecina que esté arriba, abajo, a la derecha o a la izquierda de su posición actual.
Si al principio, Drini coloca la ficha en la casilla inferior izquierda, ¿de cuántas formas puede mover la ficha hasta la casilla superior derecha, si cada recorrido debe visitar todas las casillas del tablero y no puede pasar dos veces por una misma casilla?



Olimpiadas Internacionales

XXIX Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

Del 19 al 27 de septiembre de este año, en la ciudad de San Pedro Sula, Honduras, se realizó la 29^a Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas, en la que participaron 22 países con un total de 82 estudiantes.

Toda la delegación mexicana fue premiada. Los cuatro alumnos que nos representaron, obtuvieron tres medallas de oro y una medalla de plata, logrando así una destacada participación. Ellos son: Kevin William Beuchot Castellanos (de Nuevo León), Luis Xavier Ramos Tormo (de Yucatán), Pablo Meré Hidalgo (de Querétaro) y Luis Enrique Chacón Ochoa (de Chihuahua). Kevin, Luis Xavier y Pablo obtuvieron medalla de oro, y Luis Enrique obtuvo medalla de plata. Los profesores que acompañaron a la delegación fueron: Marco Antonio Figueroa Ibarra (líder) y Daniel Perales Anaya (tutor).

Sus logros colocaron a México en el primer lugar general por países en el evento, quedando por encima de países como Argentina, Brasil, España, Perú y Portugal, entre otros. No es la primera vez que se logra esto. En 2006 y 2011 fuimos también primer lugar, sin embargo no es frecuente por ser fuerte la competencia.
La delegación mexicana ganó por segunda ocasión la Copa Puerto Rico, que se otorga al país de mejor avance relativo a los dos últimos años.

A continuación presentamos los problemas de la XXIX Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

Problema 1. Para cada entero positivo n, se define $s(n)$ como la suma de los dígitos de n. Determine el menor entero positivo k tal que

$$s(k) = s(2k) = s(3k) = \cdots = s(2013k) = s(2014k).$$

Problema 2. Halle todos los polinomios $P(x)$ con coeficientes reale tales que $P(2014) = 1$ y, para algún entero c, se cumple que $xP(x-c) = (x-2014)P(x)$.

Problema 3. Sobre una circunferencia se marcan 2014 puntos. Sobre cada uno de los segmentos cuyos extremos son dos de los 2014 puntos, se escribe un número real no negativo. Se sabe que para cualquier polígono convexo cuyos vértices son algunos de los 2014 puntos, la suma de los números escritos en sus lados es menor o igual que 1. Determine el máximo valor posible de la suma de todos los números escritos.

Problema 4. Se tienen N monedas, de las cuales $N-1$ son auténticas de igual peso y una es falsa, de peso diferente de las demás. El objetivo es, utilizando exclusivamente una balanza de dos platos, hallar la moneda falsa y determinar si es más pesada o más liviana que las auténticas. Cada vez que se pueda deducir que una o varias monedas son auténticas, entonces todas estas monedas se separan inmediatamente y no se pueden usar en las siguientes pesadas. Determine todos los N para los que se puede lograr con certeza el objetivo. (Se pueden hacer tantas pesadas como se desee.)

Problema 5. Sea ABC un triángulo acutángulo y H el punto de intersección de sus alturas. La altura desde A corta a BC en D. Sean M y N los puntos medios de BH y CH, respectivamente. DM y DN intersectan a AB y AC en X e Y, respectivamente. Si XY intersecta a BH en P y a CH en Q, demuestre que H, P, D y Q están en una misma circunferencia.

Problema 6. Dado un conjunto X y una función $f : X \to X$, denotamos para cada $z \in X$, $f^1(x) = f(x)$ y, para cada $j \geq 1$, $f^{j+1}(x) = f(f^j(x))$. Decimos que $a \in X$ es un punto fijo de f si $f(a) = a$. Para cada número real x, definimos $\pi(x)$ como la cantidad de primos positivos menores o iguales que x.
Dado un número entero positivo n, decimos que $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ es *catracha* si $f^{f(k)}(k) = k$ para todo $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
Pruebe que:
a) Si f es catracha, entonces f tiene al menos $\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) + 1$ puntos fijos.
b) Si $n \geq 36$, existe una función catracha con exactamente $\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) + 1$ puntos fijos.

Problemas y Soluciones de Olimpiadas Internacionales

55^a Olimpiada Internacional de Matemáticas

Del 3 al 13 de julio de 2014 se llevó a cabo la 55^a Olimpiada Internacional de Matemáticas en Ciudad del Cabo, Sudáfrica. México obtuvo su tercer mejor lugar histórico consiguiendo un total de cuatro medallas de plata, una medalla de bronce y una mención honorífica. El equipo estuvo conformado por:

Kevin William Beuchot Castellanos, del Estado de Nuevo León.
Juan Carlos Ortiz Rhoton, del Estado de Jalisco.
Diego Alonso Roque Montoya, del Estado de Nuevo León.
Luis Xavier Ramos Tormo, del Estado de Yucatán.
Oscar Samuel Henney Arthur, del Estado de Michoacán.
Luis Enrique Chacón Ochoa, del Estado de Chihuahua.

Kevin, Juan Carlos, Diego y Luis Xavier obtuvieron medalla de plata, Oscar obtuvo una medalla de bronce y Luis Enrique obtuvo una mención honorífica. México logró una participación destacada como equipo, quedando en el lugar 26 de 101 países participantes. Entre los países iberoamericanos, el equivpo mexicano obtuvo el primer lugar. Los profesores que acompañaron a la delegación fueron Leonardo Ignacio Martínez Sandoval (líder), Marco Antonio Figueroa Ibarra (colíder) y David Cossío Ruiz (observador).

A continuación presentamos los problemas con soluciones, de la 55^a Olimpiada Internacional de Matemáticas. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

Problema 1. Sea $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ una sucesión infinita de números enteros positivos. Demostrar que existe un único entero $n \geq 1$ tal que

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

(Problema sugerido por Austria)

Solución de Luis Enrique Chacón Ochoa. Para $i = 1, 2, \ldots, n$, sea $d_i = a_i - a_{i-1}$. Tenemos que $a_i = a_0 + d_1 + d_2 + \cdots + d_i$ para cada entero positivo i. Luego,

$$\frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} = \frac{(n+1)a_0 + nd_1 + (n-1)d_2 + \cdots + 2d_{n-1} + d_n}{n}.$$

Primero supongamos que $\frac{a_0+a_1+\cdots+a_n}{n} > a_{n+1}$. Esto es equivalente a

$$(n+1)a_0 + nd_1 + (n-1)d_2 + \cdots + 2d_{n-1} + d_n > na_0 + nd_1 + \cdots + nd_{n+1}$$

la cual es a su vez, equivalente a

$$a_0 > d_2 + 2d_3 + \cdots + nd_{n+1}.$$

Como la suma $\sum_{x=1}^{n} xd_{x+1}$ es creciente y no está acotada (pues cada d_i es un entero positivo) tenemos que la desigualdad debe ser falsa a partir de cierto entero. Es decir, existe un entero positivo k que cumple que para cada $n \geq k$ se tiene que $a_0 \leq d_2 + 2d_3 + \cdots + nd_{n+1}$, por lo que $\frac{a_0+a_1+\cdots+a_n}{n} \leq a_{n+1}$ para cada $n \geq k$.
Ahora, consideremos la desigualdad $\frac{a_0+a_1+\cdots+a_n}{n} \leq a_n$. Es equivalente a

$$(n+1)a_0 + nd_1 + \cdots + 2d_{n-1} + d_n \leq na_0 + nd_1 + nd_2 + \cdots + nd_n$$

la cual es a su vez, equivalente a

$$a_0 \leq d_2 + 2d_3 + \cdots + (n-1)d_n.$$

Por la definición de k, tenemos que esto sucederá si y solo si $n - 1 \geq k$, por lo que solamente si $n < k + 1$ se tendrá que

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

Por lo tanto, para que $a_n < \frac{a_0+a_1+\cdots+a_n}{n} \leq a_{n+1}$ tiene que suceder que $n \geq k$ y $n < k+1$, por lo que existe un único entero ($n = k$) que hace que se cumpla la doble desigualdad.

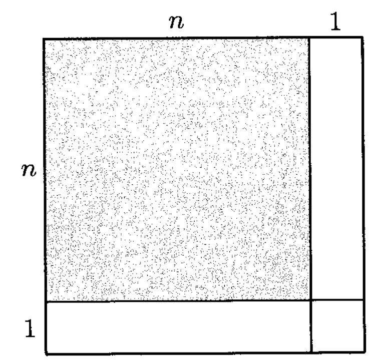
Problema 2. Sea $n \geq 2$ un entero. Consideremos un tablero de tamaño $n \times n$ formado por n^2 cuadrados unitarios. Una configuración de n fichas en este tablero se dice que es *pacífica* si en cada fila y en cada columna hay exactamente una ficha. Hallar el mayor entero positivo k tal que, para cada configuración pacífica de n fichas, existe un cuadrado de tamaño $k \times k$ sin fichas en sus k^2 cuadrados unitarios.

(Problema sugerido por Croacia)

Solución de Luis Xavier Ramos Tormo. Para cada entero positivo n, sea $f(n)$ el máximo entero positivo que cumple lo que queremos. Demostraremos que $f(n) = \lceil\sqrt{n}\rceil - 1$. Demostremos primero el siguiente lema.

Lema 1. $f(n) \leq f(n+1)$ para cada entero positivo n.

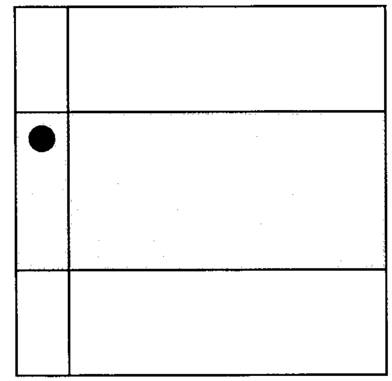
Demostración. Basta ver que en cualquier tablero de $(n+1) \times (n+1)$ con un arreglo pacífico, hay un cuadrado de $f(n) \times f(n)$ sin fichas. Para ello, consideramos un arreglo pacífico en un tablero de $(n+1) \times (n+1)$ y notamos que si no consideramos la última fila y la última columna, tenemos que en el tablero de $n \times n$ restante no hay dos fichas en la misma columna o en la misma fila, pues de otro modo el arreglo original no sería pacífico.



Si hay n fichas en este tablero de $n \times n$ sería pacífico y tendría que tener un subtablero vacío de $f(n) \times f(n)$. Si hay $n+1$ fichas tendríamos dos en una misma fila, lo cual es imposible. Si tenemos menos de n fichas, elegimos una fila y una columna sin ficha y ponemos una ficha en su intersección. Repetimos este proceso hasta que hayan exactamente n fichas en su interior. El tablero resultante sería pacífico, por lo que tendrá un subtablero vacío de $f(n) \times f(n)$. Este tablero vacío sería parte del original de $(n+1) \times (n+1)$, por lo que el lema queda probado.

Lema 2. Si $\lceil \frac{n-r}{r} \rceil \geq r$ se tiene que $f(n) \geq r$.

Demostración. Consideremos las n fichas. Como hay n columnas, debe haber una ficha en cada columna para que no haya dos fichas en alguna columna. Consideremos la ficha que está en la primera columna y consideremos también una subcuadrícula de $n \times r$ que contenga a esa ficha (lo cual es posible pues $n \geq r$).



r filas

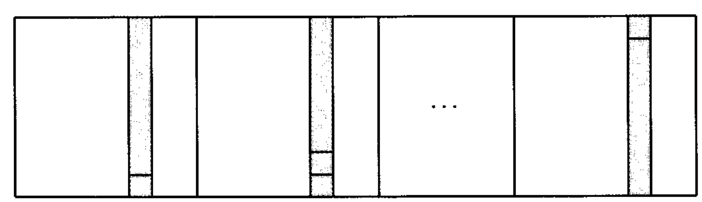
En esta franja de r filas debe haber exactamente r fichas. Si en esta franja omitimos las r columnas con ficha, nos quedan $n-r$ columnas sin ficha. Estas columnas están en r bloques: el primero entre la primera columna con ficha más a la izquierda y la segunda columna, el segundo bloque entre la segunda y la tercera y así sucesivamente hasta que el r-ésimo bloque está entre la columna con ficha más a la derecha y la orilla derecha del tablero. Algunos bloques pueden tener 0 columnas, si hay fichas en columnas consecutivas.

Como estamos poniendo $n-r$ columnas vacías en r bloques, por el principio de las casillas hay un bloque con al menos $\lceil \frac{n-r}{r} \rceil$ columnas vacías. Si $\lceil \frac{n-r}{r} \rceil \geq r$ tendremos que ahí se forma un subtablero vacío de $r \times r$, por lo que $f(n) \geq r$.

Lema 3. $f(t^2) \leq t-1$ para cada entero positivo $t \geq 2$.

Demostración. Basta con dar un acomodo pacífico en un tablero de $t^2 \times t^2$ sin subtableros vacíos de $t \times t$. Para ello, dividimos el tablero en t franjas horizontales de $t \times t^2$ y las numeramos del 1 al t de abajo hacia arriba.

En la r-ésima franja colocamos las t fichas de la siguiente manera: partimos la franja en t cuadrados de $t \times t$ y en el m-ésimo cuadrado de izquierda a derecha ponemos una ficha en la m-ésima casilla de abajo hacia arriba en la r-ésima columna de izquierda a derecha. Por construcción, este arreglo es pacífico. Veamos ahora que no contiene subcuadrículas vacías de $t \times t$.



Si una subcuadrícula de $t \times t$ está contenida en una de las franjas de $t \times t^2$, contendrá una ficha, pues hay una ficha cada t columnas. Si la subcuadrícula queda entre dos franjas de $t \times t^2$ por construcción, en cada una de estas dos franjas hay una columna con ficha que intersecta al cuadrado. Estas columnas pueden ser consecutivas o pueden intersectar a la primera y a la última columna del cuadrado. En cualquier caso, las fichas que estas columnas contienen están a distancia t, por lo que deberá haber una ficha en el cuadrado. Luego, $f(t^2) \leq t$.

Por el lema 2, tomando $n = t^2 + 1$ y $r = t$ tenemos que

$$\left\lceil \frac{t^2+1-t}{t} \right\rceil = \left\lceil (t-1) + \frac{1}{t} \right\rceil = t$$

de donde $\lceil \frac{t^2+1-t}{t} \rceil \geq t$ y $f(t^2+1) \geq t$ para cada entero positivo t. De la misma manera, por el lema 2, tomando $n = t^2$ y $r = t-1$ queda que

$$\left\lceil \frac{t^2-(t-1)}{t-1} \right\rceil = \left\lceil \frac{t^2-t+1}{t-1} \right\rceil = \left\lceil t + \frac{1}{t-1} \right\rceil = t+1 \geq t-1$$

por lo que $f(t^2) \geq t-1$. Pero por el lema 3, $f(t^2) \geq t-1$, por lo que podemos concluir que $f(t^2) = t-1$ para cada entero positivo t. Como la función f es no decreciente y se tiene $f(t^2) = t-1$ y $f(t^2+1) \geq t$ con una sencilla inducción es fácil concluir que

$$f(n) = \left\lfloor \sqrt{n-1} \right\rfloor .$$

Problema 3. En el cuadrilátero convexo $ABCD$, se tiene $\angle ABC = \angle CDA = 90°$. La perpendicular a BD desde A corta a BD en el punto H. Los puntos S y T están en los lados AB y AD, respectivamente, y son tales que H está dentro del triángulo SCT y

$$\angle CHS - \angle CSB = 90°, \quad \angle THC - \angle DTC = 90°.$$

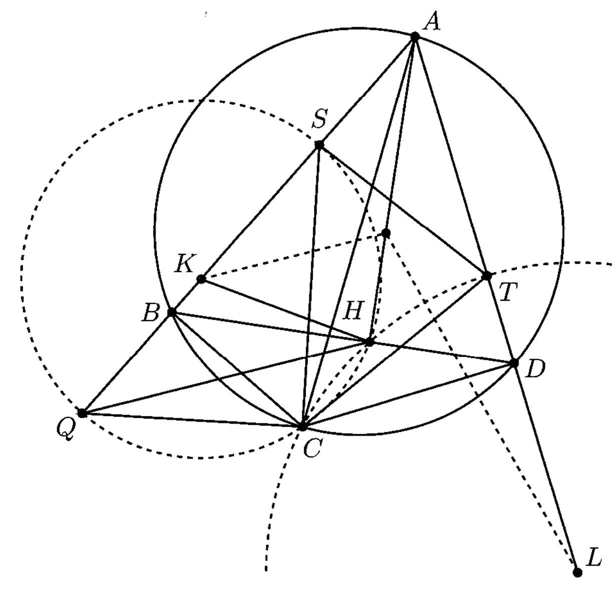
Demostrar que la recta BD es tangente a la circunferencia circunscrita del triángulo TSH.

(Problema sugerido por Irán)

Solución. Digamos que la recta por C perpendicular a SC intersecta a la recta AB en el punto Q. Luego,

$$\angle SQC = 90° - \angle BSC = 180° - \angle SHC,$$

lo que implica que los puntos C, H, S y Q están en una misma circunferencia. Más aún, como SQ es un diámetro de esta circunferencia, podemos decir que el circuncentro K del triángulo SHC está sobre la recta AB. De manera similar se demuestra que el circuncentro L del triángulo CHT está sobre la recta AD.



Para demostrar que el circuncírculo del triángulo SHT es tangente a BD, basta demostrar que las mediatrices de HS y HT se intersectan en el segmento AH. Pero, como estas mediatrices coinciden con las bisectrices de los ángulos AKH y ALH, basta demostrar que $\frac{AK}{KH} = \frac{AL}{LH}$.

Sea M la intersección de las rectas KL y HC. Como $KH = KC$ y $LH = LC$, los puntos H y C son simétricos con respecto a la recta KL, por lo que M es el punto medio de HC. Sea O el circuncentro del cuadrilátero $ABCD$. Luego, O es el punto medio de AC. Entonces, tenemos que OM y AH son paralelas, por lo que OM es perpendicular a BD. Esto, junto con la igualdad $OB = OD$ implica que OM es la mediatriz de BD y $BM = DM$.

Como CM y KL son perpendiculares, los puntos B, C, M y K están en una misma circunferencia con díametro KC. De manera similar, los puntos L, C, M y D están en una circunferencia con diámetro LC. Luego, usando la ley de senos, obtenemos que

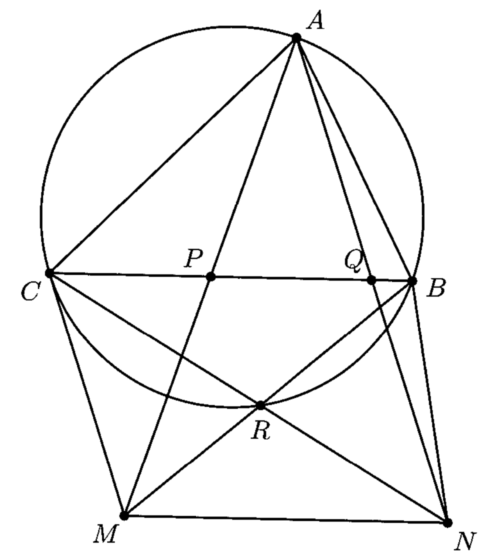
$$\frac{AK}{KL} = \frac{\sin(\angle ALK)}{\sin(\angle AKL)} = \frac{DM}{CL} \cdot \frac{CK}{BM} = \frac{CK}{CL} = \frac{KH}{LH},$$

lo que concluye la demostración.

Problema 4. Los puntos P y Q están en el lado BC del triángulo acutángulo ABC de modo que $\angle PAB = \angle BCA$ y $\angle CAQ = \angle ABC$. Los puntos M y N están en las rectas AP y AQ, respectivamente, de modo que P es el punto medio de AM, y Q es el punto medio de AN. Demostrar que las rectas BM y CN se cortan en la circunferencia circunscrita del triángulo ABC.

(Problema sugerido por Georgia)

Solución de Luis Xavier Ramos Tormo. Sea R la intersección del segmento BM con el circuncírculo del triángulo ABC. Basta demostrar que los puntos C, R y N son colineales. Sean $\alpha = \angle CAB$, $\beta = \angle ABC$ y $\omega = \angle CBM$. Como $\angle BAP = \angle BCA$, los ángulos $\angle ABM$ y $\angle BMA$ deben sumar $180^\circ - \angle BCA$, esto es, $\alpha + \beta$. Como $\angle ABM = \beta + \omega$, resulta que $\angle BMA = \alpha - \omega$.



Como el cuadrilátero $ABRC$ es cíclico, $\angle CRB = 180^\circ - \alpha$, de donde $\angle RCB = \alpha - \omega = \angle BMA$. Como los triángulos BPA y AQC son semejantes tenemos que $\frac{BP}{PA} = \frac{AQ}{CQ}$ y $\angle BPA = \angle CQA$, por lo que $\angle BPM = \angle CQN = 180^\circ - \alpha$. Como $\angle APQ = \angle AQP$, tenemos que $AP = AQ = PM = QN$. Entonces, $\frac{BP}{PA} = \frac{AQ}{CQ}$ implica que $\frac{BP}{PM} = \frac{QN}{CQ}$. Como $\angle BPM = \angle CQN$ tenemos que los triángulos QCN y PMB son semejantes, de donde $\angle QCN = \angle PMB = \angle BCR$. Y como $\angle BCN = \angle BCR$ concluimos que los puntos C, R y N son colineales.

Problema 5. Para cada entero positivo n, el Banco de Ciudad del Cabo produce monedas de valor $\frac{1}{n}$. Dada una colección finita de tales monedas (no necesariamente de distintos valores) cuyo valor total no supera $99 + \frac{1}{2}$, demostrar que es posible separar esta colección en 100 o menos montones, de modo que el valor total de cada montón sea como máximo 1.

(Problema sugerido por Luxemburgo)

Solución de Kevin William Beuchot Castellanos. Primero tomamos cada moneda con valor 1 y la ponemos en una caja cada una. Si para cierta denominación $\frac{1}{n}$ tenemos al menos n monedas, ponemos esas n monedas en una caja. Además, si para cierta denominación $\frac{1}{2k}$ tenemos al menos dos monedas, juntamos estas dos monedas y las consideraremos como una sola moneda con denominación $\frac{1}{k}$.

Sin considerar esas monedas que ya pusimos en cajas, podemos suponer que la suma es menor o igual que $n+\frac{1}{2}$ y las tenemos que poner en $n+1$ cajas para cierto $n \leq 99$. Además, ya no hay monedas con denominación 1, para cada denominación $\frac{1}{n}$ con n impar hay a lo más $n-1$ monedas y para cada denominación $\frac{1}{2k}$ hay a lo más una moneda.

Supongamos que ya hemos puesto las monedas con denominación $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{2n-1}$, en las $n+1$ cajas. Veamos que el resto de las monedas pueden ser puestas una por una. Supongamos que tenemos una moneda con denominación $\frac{1}{r}$, con $r \geq 2n$. Sea a_i la suma actual de la caja i, para $i = 1, 2, \ldots, n+1$. Si esta moneda no puede ser metida en ninguna caja tenemos que $a_i + \frac{1}{r} > 1$. Sumando estas $n+1$ desigualdades tenemos que

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1} + \frac{n+1}{r} > n+1.$$

Por otro lado, como $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1} \leq n + \frac{1}{2} - \frac{1}{r}$ tenemos que

$$n + \frac{1}{2} - \frac{1}{r} + \frac{n+1}{r} = n + \frac{1}{2} + \frac{n}{r} > n+1,$$

de donde $\frac{n}{r} > \frac{1}{2}$ y así $2n > r$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, se puede poner la moneda con denominación $\frac{1}{r}$, con $r \geq 2n$, y de esta manera se pueden poner el resto de las monedas de una por una. Luego, basta ver que puedo poner todas las monedas con denominación $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{2n-1}$, en las $n+1$ cajas.

Para cada $i = 2, 3, \ldots, n-1$ consideremos las monedas con denominación $\frac{1}{2i-1}$ y $\frac{1}{2i}$. De la primera tenemos a lo más $2i-2$ monedas y de la segunda, a lo más 1. Luego, el valor de estas monedas es menor o igual a

$$1 - \frac{1}{2i-1} + \frac{1}{2i} < 1,$$

por lo que podemos ponerlas en una caja, ocupando $n-2$ cajas. En una caja ponemos la posible moneda con denominación $\frac{1}{2}$ y en otra las monedas con denominación $\frac{1}{2n-1}$, por lo que ocupamos n cajas (en este punto sobró una caja, pero posiblemente será u-sada con las monedas de mayor denominador). Esto concluye la demostración.

Problema 6. Un conjunto de rectas en el plano está en *posición general* si no hay dos que sean paralelas ni tres que pasen por el mismo punto. Un conjunto de rectas en posición general separa el plano en regiones, algunas de las cuales tienen área finita; a estas las llamamos sus *regiones finitas*. Demostrar que para cada n suficientemente grande, en cualquier conjunto de n rectas en posición general es posible colorear de azul al menos $\sqrt{n}$ de ellas de tal manera que ninguna de sus regiones finitas tenga todos los lados de su frontera azules.

Nota. A las soluciones que reemplacen $\sqrt{n}$ por $c\sqrt{n}$ se les otorgarán puntos dependiendo del valor de c.

(Problema sugerido por Austria)

Solución. Sea L el conjunto de las líneas y consideremos B un conjunto de líneas azules maximal. Sea k el número de elementos de B. Pintemos de rojo el resto de las líneas.

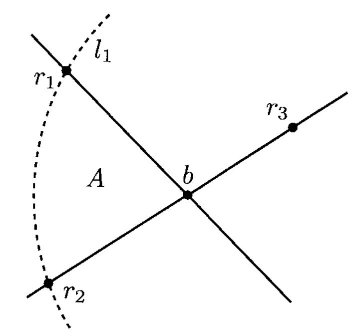
Si un punto es intersección de una línea roja y una azul, diremos que dicho punto es rojo. Un punto será azul si es la intersección de dos líneas azules. Consideremos cualquier línea roja l y tomemos una región arbitraria $A \in \mathfrak{F}$ tal que su único lado rojo está en la línea l. Esta región debe existir gracias a la maximalidad de B. Sean $r', r, b_1, \ldots, b_k$ sus vértices en el orden de las manecillas del reloj con r y r' en l. Luego, los puntos r y r' son rojos y los puntos $b_1, \ldots, b_k$ son azules. Asociaremos el punto r y el punto b_1 a la línea roja l. Podemos notar que para cada pareja de puntos r (rojo) y b (azul) a lo más serán asociados a una línea roja, pues solo habrá a lo más una región A que tenga a r y b como vértices consecutivos en el orden de las manecillas del reloj.

Demostraremos que a lo más dos líneas rojas son asociadas a cada punto azul b. Esto lleva a la cota

$$n - k \leq 2\binom{k}{2}$$

la cual es equivalente a $n \geq k^2$.

Supongamos lo contrario, que tres líneas rojas l_1, l_2, l_3 son asociadas al mismo punto azul b. Sean r_1, r_2 y r_3 respectivamente los puntos rojos asociados a esas líneas; todos estos puntos son diferentes. El punto b define cuatro rayos azules y cada punto r_i es el punto rojo más cercano a b en alguno de estos rayos. Luego, podemos suponer que los puntos r_2 y r_3 están sobre una línea azul que pasa por b, mientras que r_1 está en otra línea.



Consideremos la región A usada para asociar r_1 y b con l_1. Tres de sus vértices consecutivos en el orden de las manecillas del reloj son r_1, b y r_2 o r_3 (digamos que es r_2). Como A tiene solo un lado rojo, solo puede ser el triángulo r_1br_2; luego, tanto l_1 como l_2 pasarían por r_2, de la misma manera que una línea azul. Esto resulta imposible por las condiciones del problema.

Algunos Recuerdos

Por Mikhail Gromov[3]

Tomado del libro "The Abel Prize 2008-2012"

Después de algunos infructuosos y frustrantes intentos por escribir mi autobiografía he llegado a la inevitable conclusión de que es una tarea *lógicamente imposible*.

¿Será cierto?, después de todo, hay numerosos contraejemplos en contra de esta *conjetura de no existencia*. Yo mismo he disfrutado mucho leyendo las autobiografías que figuran en el primer volumen del libro de Abel. Sí, aún así, sigo pensado que la conjetura sigue siendo válida, aunque en un contexto más estrecho, si se separa al *matemático-ser humano* del *matemático-matemático*.

Nuestras vidas *no-matemáticas* no son, matemáticamente hablando, demasiado interesantes, a menos que uno tenga la mala suerte de vivir en tiempos difíciles o que tenga que pasar por *interesantes* experiencias personales.

La vida (matemática) de nosotros los matemáticos se ve reflejada en las ideas que exponemos en nuestros escritos, ¿qué más se podría añadir a lo ahí dicho? ¿habrá algo adicional *no-trivial* en nuestras vidas?

Ser triviales es nuestro más temido precipicio: *dices cosas estúpidas*, *cosas no originales*, *cosas grotescamente erróneas* pero todo se olvidará cuando el polvo se asiente de nuevo. Pero, si en un escrito, pomposamente, aseguras que $a+b=c$ es un *Teorema*, entonces serás recordado para siempre como el *tipo del* $a+b$, sin importar que después de ello demuestres teoremas gloriosos. (Nótese que $2+2=4$ es un hecho bastante *no-trivial* o al menos no lo bastante *trivial*.)

Estas ideas me asaltaron desde septiembre de 1960 en la entonces Universidad de Leningrado cuando nuestro profesor de análisis Boris Mikhailovich Makarov, al finalizar nuestra primera clase de cálculo me dijo, en términos un tanto metafóricos, que si no tenía nada no trivial que decir, mejor haría en mantener la boca cerrada.

[3]Mikhail Gromov es un matemático ruso conocido por sus importantes contribuciones en diversas áreas de las matemáticas. Trabaja actualmente en el Institut des Hautes Études Scientifiques (IHES) en Francia. Ha recibido premios importantes por sus aportaciones, entre los que destaca el premio Abel, en 2009.

En lo sucesivo, alentado por mis profesores y mis estudiantes, he tratado de seguir este consejo y, aparentemente, he tenido éxito, pues por lo menos no he oído ningún comentario despectivo acerca de mi boca en los últimos 10 – 20 años. Extrañamente esto no me hace sentir mucho más feliz.

Lo *Trivial* es relativo. Cualquier cosa que se haya dicho al menos 2 minutos antes, resulta trivial para el matemático cuando está trabajando. Pero podríamos asombrarnos al mirar hacía atrás y recordar todos aquellos momentos personales donde hemos vivido un punto de transición *Eureka*. (Según la edición revisada del Diccionario del Griego Antigüo de Terry Pratchett's, la traducción de *eurerka* es *denme una toalla.*)

Otro concepto que, como matemático, descubres en algún momento es el de *problema no-resuelto*. David Ruelle una vez dijo que él ve un problema cada vez que se siente agobiado por no entender algo. Los niños, como los científicos, son también buenos en el no entendimiento de las cosas, sólo que en este caso, los agobiados son sus padres con el sin fin de preguntas ¿Qué? y ¿Por qué?, ¿Cuándo? y ¿Cómo?, ¿Dónde? y ¿Quién?

Conforme la personalidad adulta madura, sin atender a las inclinaciones científicas o artísticas, se terminan resolviendo estas preguntas infantiles con un simple: *esta es la pregunta más estúpida que he oído jamás*. (Lipman Bers una vez me dijo que ésa era la respuesta que recibió cuando en una ocasión le preguntó a su profesor de matemáticas de la preparatoria si podría haber dos infinitos distintos.)

Mis padres no fueron matemáticos sino doctores, de hecho eran patólogos y con frecuencia comentaban y discutían entre ellos y con sus amigos patólogos sobre lo que encontraban durante las autopsias.

Recuerdo una historia, muy graciosa, o al menos a todos los hacía reir mucho. Mi padre había pasado varias horas revisado y volviendo a revisar, meticulosamente, en el interior del cuerpo que estaba sobre la mesa de disección, sin encontrar nada anónmalo o que indicara la causa de la muerte. Cuando ya estaba apunto de claudicar y rendirse declarando la causa de la muerte como *falla cardiaca*, el ayudante encargado de limpiar y mover los cuerpos le dijo: *Oiga, doctor, no le parece gracioso que este hombre no se haya lavado el pie izquierdo, vea las manchas negras que tiene ahí.* Inmediatamente mi padre cayó en la cuenta de que la causa de la muerte había sido una electrocutación, aparentemente el pobre hombre se había parado sobre un cable de alta tensión.

Al respecto, vale la pena hacer algunos comentarios. Según los protocolos, toda autopsia debe comenzar con un cuidadoso examen externo del cuerpo, mismo que debe realizarse antes de iniciar la disección. Mi padre, con todo y su gran experiencia, probablemente en ese momento estaba abstraido en sus propios pensamientos: la negligencia en la inspección física resulta tan graciosa para un patólogo, como la simplificación $dx/dy = x/y$ podría serlo para un matemático. (Maynard Smith, un gran biólogo teórico, se queja de que algunos editores de revistas especializadas en biología, en ocasiones, han *simplificado* $dx/dy \to x/y$ en sus escritos.)

La realización de autopsias ha sido practicada rutinariamente en los hospitales de Rusia. Los médicos tratantes estaban en constante zozobra a la espera del veredicto final del patólogo, al igual que estudiantes a la espera de la calificación de un examen. Eventualmente los médicos se revelaron (la autopsia en la mayoría de los países, si se practica, es sólo de manera ocasional y generalmente en cuerpos exhumados con más de una década) pues las muertes de los pacientes siempre pueden ser declaradas con

seguridad como debidas a fallas cardiacas.
En todo esto, hay una obvia lección moral para patólogos y matemáticos por igual. Pero la *pregunta idiota* quizá se le haya escapado: el Qué, el Cómo y el Por qué de la falla cardíaca al morir.
No sólo es que el corazón se paró (esto es lo que el llamado *sentido común* te diría). De hecho, los desfibriladores (que pueden verse en los aeropuertos) sirven para parar y *reiniciar* al corazón (estos aparatos *salvan* vidas si son usados con prontitud), pues el cerebro sobrevive un par de minutos después de la detención del suministro de oxígeno, derivada del paro circulatorio.
Lo que le sucede al corazón en el momento crítico de transición previo al paro final, es un cambio en la dinámica de las corrientes eléctricas / químicas en el tejido muscular del corazón (un switch hacia un ritmo caótico no-cuasiperiódico). Una fuente externa de alto voltaje puede provocar esto, pero también puede *dispersar el caos*.
¿No es esta una *Nueva aplicación de la teoría del caos a los sistemas vivos*? podría exclamar un matemático brillante. De hecho, esta no es una mala idea. Apuesto que hay varios artículos en *Nature* con este título. El asunto es que los sistemas biológicos caóticos no viven mucho, sus precarias vidas son aún más cortas que las vidas medias de dichos artículos. No existe una teoría generalmente aceptada sobre la arritmia en general, ni sobre la fibrilación ventricular (esto a lo que finalmente llegaremos) en particular. La fisiología del corazón y las matemáticas en el fondo de todo este asunto no son tan triviales. Y, probablemente, la verdadera *pregunta estúpida* todavía no ha sido formulada.
La biología en general y la medicina en particular están llenas de sorprendentes rompecabezas matemáticos. A los 5 años te preguntas:
¿Podrían 4 elefantes derrotar a una ballena en una pelea?
Veinte años después, la pregunta es:
¿Cómo, en principio, una simple bacteria, un pequeño virus, e.g. HIV cuyo conocimiento absoluto del mundo puede escribirse con cuatro letras en una cadena ARN de longitud 9749, puede burlar a la humnidad con therabyts (10^{12}) de *información* disponible, almacenada tanto en nuestras memorias sinápticas individuales como en nuestras bibliotecas?
¿Cuál es ese conocimiento del virus que no tenemos? ¿Cuántos bits tenemos que añadir (o ¿borrar?) a nuestros bancos de conocimiento para vencer a 9749?
Mi segunda historia necesita un breve preámbulo. Existen varias reacciones químicas inocuas que convierten soluciones con aspecto de agua en soluciones de color rojo con aspecto de sangre.
Algo más asombroso sucede cuando se mezcla perganmanato de potasio con ácido sulfúrico concentrado,

$$6KMnO_4 + 9H_2SO_4 \rightarrow 6MnSO_4 + 3K_2SO_4 + 9H_2O + 5O_3.$$

El vapor de O_3 (ozono) provocará la ingnición de un papel empapado en alcohol; con un poco de suerte, una explosión arrojará ácido sulfúrico sobre los ojos.
Siguiendo las reglas básicas de la química segura, cuando vaya a producir sangre artificial deberá colocar un plato hondo grande B enfrente de usted y *sólo después* de ello proceder a realizar la mezcla de $KMnO_4$ y HSO_4 en un tubo de ensayo T, asegurándose en todo momento de que B esté perfectamente alineado entre T y sus ojos.

Cuando T explota, el plato hondo colocado en medio protege los ojos del ácido sulfúrico, mientras que el sangriento contenido de B salpica por todo el rostro.

Esto fue justo lo que me pasó durante la demostración de *Los milagros de la química* que se realizó en nuestra preparatoria, cuando tenía aproximadamente 13 años de edad. El público quedó fuertemente impresionado, en especial nuestro profesor de química. De igual manera yo, aunque me perdí de la mejor parte del show al no poder ver la sangre por todo mi rostro ya que no tenía ningún espejo a la mano.

Desde luego que yo no tenía la menor idea de por qué había explotado la maldita cosa (quizá algunos lectores ya habrán adivinado lo que está mal en el protocolo arriba descrito), pero después, nuestro profesor de química, Ivan Ivanovich Taranenko, me dijo que él había sido el que cometió el error: de hecho mi plan inicial era mezclar $KMnO_4$ y HSO_4 en un plato plano, pero Ivan Ivanovich me sugirió mejor hacer la mezcla en un tubo de ensayo. El calor junto con los gases producidos quedaron atrapados en el relativamente estrecho tubo de ensayo, así que terminaron generando una explosión.

En aquel tiempo, no quedé muy impresionado por la honestidad demostrada por mi maestro, asumí que éste era un comportamiento humano ordinario.

Después, he descubierto qué tan difícil es psicológicamente emular aún una versión menor de esto, e.g. dando un reconocimiento *adecuadamente* de la influecia que tuvo una observación de otro colega en tu propio teorema. Por ejemplo, escribiendo mi primera versión del artículo sobre la conjetura de Banach, convincentemente me dije a mí mismo que el comentario de Dima Fuks sobre explorar los grupos de homotopía de la teoría clásica de grupos para evaluar dimensiones de sus espacios k-clasificadores, era demasiado trivial para merecer una mención.

Me siento apenado por la cantidad de algunos de estos comentarios *inmencionables* que he acumulado y muchos compañeros me han contado de dolorosas batallas similares con ellos mismos cuando deben resolver *el problema de los agradecimientos*. Sin embargo, para otros no hay problema en absoluto. Probablemente, la honestidad es natural para ciertas personas y algunos no ven dificultades, pues nunca han intentado ser honestos.

Cuando vivía en Rusia, la principal salida de los transmisores de radio soviéticos era la *interferencia blanca* (a mí siempre me pareció gris). De 2 a 7 años en prisión era la alternativa a negar el punto de vista oficial, según el cuál no había tal cosa como la interferencia blanca. Pero aún los admiradores soviéticos de occidente admitían su existencia y sugirieron algunas explicaciones plausibles para ella, de las cuales la más convincente fue la de prevenir el aterrizaje de platillos voladores, cargados de hombrecillos verdes hambrientos de los deliciosos cultivos verdes, sobre los campos de agricultura soviéticos.

Esta *interferencia blanca* no abarcaba ni al espectro del FM (40-50 Mhz) ni al de la televisión (alrededor de los 70 Mhz) por obvias razones. Pero una tarde la interferencia en la TV comenzó. La gente en los departamentos donde vivíamos comenzó a abrir las puertas y con preocupación miraba a los otros. Ellos no se atrevían a preguntar en voz alta sobre lo que pensaban estaba sucediendo pero *sí, ahí estaba* y era evidente a los ojos de todos.

Desde luego, en la familia no había secretos y mi madre corrió a darme la noticia. Yo había triunfado: por primera (y última) vez en mi vida, algo hecho con mis manos había funcionado. Ese *algo* (un pequeño transmisor de radio que yo había ensamblado) debía generar 42 Mhz. Pero quién se preocupa por un 40 % de error, el hecho real es que funcionaba y me hizo sentir envuelto en una burbuja de orgullo.

Mi interés en el proyecto haga-usted-mismo-su-radio fue influenciado por mi amigo cercano, Lev Slutsman, con quien cursé la preparatoria y juntos ingresamos al departamento de matemáticas de la Universidad. Las matemáticas de las leyes de la electricidad eran para él algo real, algo que podía sentir con sus dedos, los aparatos fabricados por él sí funcionaban. Él poseía un raro don matemático tanto en los huesos como en la cabeza (Lev ahora trabaja en Estados Unidos y es autor de multitud de patentes de algoritmos para probar grandes redes de telecomunicaciones y algunas otras cosas por el estilo).

Había otro muchacho en nuestra preparatoria, Dima Smirnov, con una habilidad similar, aparentemente con un matiz no matemático. Dima era el peor, el más flojo estudiante de la generación y a duras penas pudo graduarse.

En una ocasión teníamos que hacer algo en casa para llevarlo a la clase. Muchos estudiantes, incluyéndome, compramos modelos de planeadores, mismos que teníamos que ensamblar a partir de piezas estándar, compradas en la tienda junto con el correspondiente instructivo de armado.

Los profesores evaluaban nuestras creaciones de acuerdo a qué tan bonitos lucían. El mío fue el segundo más sucio, pero el de Dima era cuatro veces más sucio y totalmente asimétrico. Obviamente él era demasiado flojo como para leer las instrucciones. Sin embargo, su planeador era el único que planeaba.

Ni los profesores, ni los compañeros estudiantes se impresionaron con el planeador de Dima. Todos nos sentíamos incómodos. Parecía injusto, incongruente, completamente absurdo que esa horrible cosa salpicada de aceite y cubierta con mogotes de sucio pegamento pudiera deslizarse tan graciosamente por el aire durante una docena de metros, mientras que nuestros bellamente ensamblados y limpios planeadores, se iban derechito en picada hacia el piso, sin importarles nuestros esfuerzos por mantenerlos horizontales. (Después de la graduación Dima ingresó al departamento de física de la Universidad y se convirtió en un físico experimental muy exitoso.)

Más tarde conocí a dos físicos experimentales en Estados Unidos y Francia (cuyos nombres olvidé, dado que no fue hace mucho). Uno de ellos estaba trabajando en computadoras cuánticas y el segundo estaba haciendo nano-aparatos, si recuerdo correctamente, con un microscopio atómico (aparato que más bien sirve para *tocar* los átomos que para verlos). Toda la matemática de la mecánica cuántica, al menos todo lo que he escuchado al respecto, incluyendo la representación de las C^*-álgebras, de hecho, estaba en sus huellas digitales.

¿Qué nivel de matemáticas se necesita para sostener ante una comunidad científica qué tanto puede filtrarse hasta los dedos de alguien?

Aprender y entender matemáticas es difícil, ya sea leyendo artículos y/o discutiendo con otras personas. (De hecho, no tanto platicando sino escuchando. *No se puede aprender mucho con la boca abierta*, solía decirme Dennis Sullivan.)

No es frecuente que algo que leas te inspire justo en el punto correcto, sin embargo, recuerdo una excepción: El artículo de 1966 por Tony Phillips en Topología y la existencia de las submersiones.

Previamente, en un seminario para estudiantes dirigido por nuestro profesor Vladimir Abramovich Rokhlin, estudiamos la teoría de inmersiones de Smale y Hirsh. Yo pensaba que tenía una vaga idea de lo que se trataba.

El hecho de que las submersiones, que son un tanto contrarias a las inmersiones, sin embargo, se hayan derivado de los pasos de Smale-Hirsh, para mí, fue toda una revelación. Me tomó cerca de un año entender lo que estaba en el fondo de la similitud.

Algo más que me escribió Tony en una carta privada, me mantuvo intrigado por algún tiempo. Esta carta contenía un par de páginas con matemáticas incomprensibles, comenzando con algo como:

...un gromomorfismo involutivo $G : SU \rightarrow US$ *de tipo admisible... ...T transforma* $MG \rightarrow SB$*...*

No podía entender ni una sóla frase de esto. Pero cuando se lo mostré a mi amigo Volodia Eidlin, me preguntó: *¿Qué es un gromomorfismo?*

Te refieres a un homomorfismo, le dije, *esa cosa de gromomorfismo no existe*. (Homomorfismo se deletrea y pronuncia *gomomorfismo* en ruso.)

¿Lo has leído tal y como está escrito?, él estaba desconcertado. Aquí dice *gromomorfismo*, en blanco y negro.

Debe ser un error de dedo... - murmuré, pero entonces me di cuenta. Lo de Tony era un mensaje encriptado. Él sugería que debía emigrar de la Unión Soviética a Estados Unidos y me invitó a SUNY en Stony Brook, donde él trabajaba. (Habíamos conocido a Tony un año antes, cuando él visitó Rusia. Su visita fue breve, pero suficientemente larga como para aprender las reglas básicas de conspiración para la supervivencia en la Unión Soviética).

Varios años después seguí su sugerencia. Cuando llegué a Stony Brook disfruté la hospitalidad de Tony así como la de todo el departamento de matemáticas de SUNY.

El único problema que tuve con la gente fue el *choque cultural*. Todo el mundo era muy amable conmigo ofreciendo su ayuda para superar ese misterioso *choque cultural*. Como no entendía de qué se trataba ese choque y no quería decepcionar a nadie tuve que inventar algunas historias impactantes al respecto de cómo extrañaba a los osos polares patinando en las calles de Leningrado durante la oscuridad de las noches polares y un bultoso iceberg familiar donde manteníamos los alimentos perecederos.

Cuando lees un libro o un artículo, puedes descubrir cosas que el autor no tuvo la menor idea o intensión de haber puesto ahí. Cuando se escucha a un matemático, a menudo se aprenden cosas que él/ella supone que conoces de antemano, cosas obvias desde su perspectiva, cosas que no hace falta tomarse la molestia de poner por escrito.

Una de esas cosas *obvias* que yo aprendí de Dima Kazhdan, cuando visitó Moscú, es que el teorema de libertad del subgrupo de Kurosh, se sigue del hecho de que la cubriente de una gráfica, es a su vez una gráfica: la dimensión es un invariante bajo cubrientes.

Hasta ese momento la teoría de grupos era para mi algo resbaladizo que se me escapaba de las manos. Pero a partir de esta observación todo empezó, poco a poco, a caer en su lugar; muy lentamente (después de todo, me llevó cerca de 20 años poder expresar algunos otros fragmentos de la teoría de grupos en términos del lenguaje geométrico).

Estoy seguro de que hay muchos comentarios *omitidos en virtud de su trivialidad* que nadie me ha dicho jamás, cosas básicas y simples que nunca he entendido.

Esto mismo aplica para los que no son matemáticos, no es posible aprender todo de los libros. Sólo algunos pocos autores, recuerdo esto mirando los escritos de Richard Feynman (QED), Charles Cantor (La ciencia y la tecnología detrás del proyecto del genoma humano) y Maxim Frank-Kamenetskii (Descubriendo al ADN), tienen la claridad de mente así como el valor para señalar algo que es esencial y obvio para el iniciado, pero que no puede ser visto por los extraños.

Un frustrante episodio particular de esto me sucedió estudiando Francés y no ciencia o matemáticas. Equipado con varios libros, cintas, etc., rigurosamente seguí las reglas fonéticas y practiqué leyendo en voz alta las terminaciones *ents* al final de los verbos, como en *ils parlent*. Mucho después, habiendo vivido en París por diez años y habiendo desarrollado un completo *automatismo* para hablar francés, me topé con un libro de texto publicado en Quebec, en 1972, donde el autor, Gilbert Taggart, explica, junto con otras muchas cosas (las cuales ya eran tardías para mí) que la terminación *ent* no tiene significado para la lectura.

Me quedé preguntándome el por qué en la mayoría de los otros libros esto se mantenía en secreto y de repente me di cuenta qué tan estúpida era la pregunta: *todos* sabían esto, ninguna persona, además de mí, jamás ha pronuciado *ils **parlent***, sin importar qué tanto se intente buscar a alguien en París (¿sería diferente en Quebec?).

Como ya mencioné, cuando aprendes algo a partir de un escrito matemático puede, especialmente después de un tiempo, que ese algo diverja de lo que el autor tenía en mente. Pero también puede suceder algo opuesto, una especie de convergencia. Esto me sucedió una vez... con la ayuda de un ladrón.

Cuando comencé a estudiar los escritos de Nash de 1956 y 1966 (esto fue en el seminario de Rokhlin $\approx$ 1968), su demostración me golpeó, tan convincente, como para colgarse uno mismo de los pelos. Bajo presión de Rokhlin, profundicé en ella, y, eventualmente, llegué al meollo del asunto: Parecía ser un argumento circular de *punto fijo por iteración*, donde los mapeos iterados eran *forzados* a una contracción por medio de ajustar las normas en los espacios involucrados en cada paso del proceso de iteración. El resultado final brota al término de un cálculo largo, pero directo, el cual milagrosamente, te levanta jalado por el cabello.

Yo escribí una versión resumida del teorema de Nash en mi artículo de 1972, donde aislé el proceso de iteración en el espacio de las normas y donde una parte del argumento de Nash quedó implícito en las definiciones.

Pero, cuando intenté reproducir esto en mi libro de ecuaciones diferenciales parciales, descubrí que el precio a pagar por *la formalización correcta* era que el texto se volvía ininteligible y tuve que escribir todo de nuevo.

Este fue un trabajo duro, me sentí aliviado cuando quedó terminado y entregué el manuscrito a nuestro capturista en SUNY, era alrededor de 1979 y todavía estaba en Stony Brook.

La siguiente semana, entraron a robar a la oficina de la secretaria y mi manuscrito desapareció, junto con un par de máquinas de escribir. Entonces, tuve que escribir todo de nuevo por tercera vez.

Tratando de reconstruir la demostración y viendo que me era imposible hacerlo, encontré que mi *formalización mediante definiciones* era incompleta y mi argumento, tal y como estaba formulado en 1972, no era válido (para variedades no compactas). Cuando simplifiqué todo y escribí la demostración con meticuloso cuidado, me di cuenta de que, renglón por renglón, era prácticamente igual a la del escrito de Nash, 1956. ¡Su razonamiento resultó ser un punto fijo estable en el *espacio de las ideas*! (Cabe mencionar que no fui ni el primero, ni el último, en generalizar/simplificar/ampliar a Nash,

pero su demostración aún permanece en la cima.)
¿Qué son nuestras ideas? - *Desde la creación hasta la decadencia. Igual que las burbujas en un río. Brillando, estallando, naciendo de nuevo* (Shelly).
Las matemáticas, ¿se descubren o se inventan?
Aún si alguna vez hemos aprendido las respuestas, deberíamos estar tan insatisfechos como un viejo geógrafo si la pregunta directa:
La Tierra descanza ¿sobre cuatro elefantes o sobre una ballena?
fuera confusamente contestada:
Nada existe en el universo excepto los átomos en el vacío; cualquier otra cosa es sólo opinión. (¿Leucipo? ¿Demócrito? ¿Lucrecio?)
Nosotros, los matemáticos, estamos igualmente lejos de hacernos las preguntas correctas.

Apéndice

Criterios 5 (Criterios de divisibilidad). *Un número entero es divisible,*

- *entre* 2*, si el dígito de las unidades es un número par.*
- *entre* 3*, si la suma de sus dígitos es divisible entre* 3*.*
- *entre* 4*, si el número formado por los dos últimos dígitos (el de las unidades y el de las decenas) es divisible entre* 4*.*
- *entre* 5*, si el dígito de las unidades es* 5 *o* 0*.*
- *entre* 6*, si es divisible entre* 2 *y* 3*.*
- *entre* 8*, si el número formado por sus últimos tres dígitos es divisible entre* 8*.*
- *entre* 9*, si la suma de sus dígitos es divisible entre* 9*.*

Definición 6 (Divisibilidad). *Si* a *y* b *son enteros, se dice que* b *divide* a *o que* a *es múltiplo de* b*, si* $a = bq$ *para algún entero* q*, y se denota por* $b \mid a$*.*

Definición 7 (Congruencias). *Dados dos enteros* a*,* b *y un entero positivo* m*, decimos que* a *es congruente con* b *módulo* m *si* $a - b$ *es múltiplo de* m*. En este caso escribimos* $a \equiv b \ (mod\ m)$*.*

Teorema 8 (Propiedades de las congruencias). *Sean* a, b, c, d, m *enteros con* $m \geq 1$*.*

1. *Si* $a \equiv c \ (mod\ m)$ *y* $c \equiv d \ (mod\ m)$*, entonces* $a \equiv d \ (mod\ m)$*.*
2. *Si* $a \equiv c \ (mod\ m)$ *y* $b \equiv d \ (mod\ m)$*, entonces* $ab \equiv cd \ (mod\ m)$*.*
3. *Si* $a \equiv c \ (mod\ m)$*, entonces* $a^n \equiv c^n \ (mod\ m)$ *para todo entero positivo* n*.*
4. *Si* $ab \equiv bc \ (mod\ m)$*, entonces* $a \equiv c \ (mod\ \frac{m}{(b,m)})$ *donde* (b, m) *denota el máximo común divisor de* b *y* m*.*

Teorema 9 (Pequeño teorema de Fermat). *Si* p *es un número primo y* a *es un entero primo relativo con* p*, entonces* $a^{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p)$*.*

Teorema 10 (Inducción). *El método de inducción se usa para demostrar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$, donde k_0 es un entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:*

1. *Caso base: Se demuestra que $P(k_0)$ es verdadera.*
2. *Hipótesis de inducción: Se supone verdadera la proposición $P(k)$ para algún entero $k \geq k_0$.*
3. *Se demuestra que $P(k+1)$ es verdadera.*

Concluimos entonces que $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$.

Teorema 11 (Principio de las casillas). *Si $kn+1$ objetos son colocados en n casillas, entonces al menos una casilla contiene $k+1$ objetos. En particular, si $n+1$ objetos son colocados en n casillas, entonces al menos una casilla contiene dos o más objetos.*

Teorema 12 (Desigualdad media aritmética - media geométrica). *Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números reales positivos, entonces*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n},$$

y la igualdad se cumple si y sólo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Teorema 13 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). *Para cualesquiera números reales $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ se cumple que,*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

La igualdad se verifica si y sólo si existe un número real λ tal que $x_i = \lambda y_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

Teorema 14 (Suma de los ángulos internos de un triángulo). *La suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$.*

Teorema 15 (Teorema de Pitágoras). *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Definición 16 (Puntos y rectas notables de un triángulo).

1. *Mediana. Recta que une un vértice y el punto medio del lado opuesto.*
2. *Centroide. Punto donde concurren las medianas. También se le llama gravicentro o baricentro.*
3. *Mediatriz. Recta perpendicular a un lado que pasa por su punto medio.*
4. *Circuncentro. Punto donde concurren las mediatrices. Es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.*

5. *Bisectriz interna. Recta que divide a un ángulo interior de un triángulo en dos ángulos de la misma medida.*

6. *Incentro. Punto donde concurren las bisectrices internas. Es el centro de la circunferencia inscrita al triángulo.*

7. *Altura. Recta trazada desde un vértice que es perpendicular al lado opuesto de dicho vértice.*

8. *Ortocentro. Punto donde concurren las alturas.*

Definición 17 (Congruencia de triángulos). *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo ABC son iguales a los ángulos y los lados del triángulo $A'B'C'$.*

Criterio 18 (Criterio de congruencia LLL). *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le llama lado-lado-lado y lo denotamos como LLL.*

Criterio 19 (Criterio de congruencia ALA). *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como ángulo-lado-ángulo y lo denotamos como ALA.*

Definición 20 (Semejanza de triángulos). *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir,*

$$\begin{aligned} \angle ABC &= \angle A'B'C' \\ \angle ACB &= \angle A'C'B' \\ \angle BAC &= \angle B'A'C' \end{aligned}$$

y sus lados homólogos son proporcionales, esto es

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$

Criterio 21 (Criterio de semejanza AA). *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.*

Criterio 22 (Criterio de semejanza LAL). *Si dos triángulos tienen dos lados correspondientes proporcionales y el ángulo entre dichos lados igual, entonces los triángulos son semejantes. A este criterio de semejanza se le conoce como lado-ángulo-lado y lo denotamos por LAL.*

Teorema 23 (Teorema de Thales). *Si ABC es un triángulo y D, E son puntos sobre los lados AB y CA, respectivamente, entonces los segmentos DE y BC son paralelos si y sólo si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.*

Teorema 24 (Desigualdad del triángulo). *Los números positivos a, b y c son las medidas de los lados de un triángulo si y sólo si se cumplen las siguientes relaciones,*

$$\begin{aligned} a+b &> c, \\ a+c &> b, \\ b+c &> a. \end{aligned}$$

Teorema 25 (Medida del ángulo inscrito). *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados, es decir, la mitad del ángulo central que subtiende el mismo arco.*

Teorema 26 (Potencia de un punto).

1. *Si dos cuerdas AB y CD de una circunferencia se intersectan en un punto P, entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.*
2. *Si A, B y T son puntos sobre una circunferencia y la tangente en T intersecta en un punto P a la prolongación de la cuerda AB, entonces $PT^2 = PA \cdot PB$.*

Definición 27 (Cuadrilátero cíclico). *Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.*

Teorema 28 (Cuadrilátero cíclico). *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y sólo si la suma de los ángulos opuestos es igual a* $180°$, *es decir,*

$$\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180^\circ.$$

Teorema 29 (Teorema de Ceva). *Si L, M y N son puntos sobre los lados (o extensiones) BC, CA y AB, respectivamente, del triángulo ABC, entonces AL, BM y CN son concurrentes si y sólo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1$.*

Teorema 30 (Teorema de Menelao). *En un triángulo ABC, si L, M y N son puntos sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente (o sobre sus extensiones), entonces L, M y N son colineales si y sólo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -1$, donde los segmentos se están considerando como segmentos dirigidos.*

Definición 31 (Excírculo). *Decimos que una circunferencia C está exinscrita en el triángulo ABC respecto al ángulo $\angle BCA$, si C es tangente a los lados del ángulo $\angle BCA$ y al lado AB por fuera del triángulo dado. También se dice que C es el excírculo del triángulo ABC respecto al ángulo $\angle BCA$.*

Teorema 32 (Recta de Euler). *En un triángulo ABC, el ortocentro, el centroide y el circuncentro son colineales. La recta donde se encuentran estos puntos se conoce como la recta de Euler.*

Bibliografía

[1] A. Alberro Semerena, R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Problemas avanzados de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Desigualdades*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[4] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría. Ejercicios y Problemas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[5] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, elemental*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2011.

[6] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, avanzado*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2012.

[7] J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado, R. Vázquez Padilla. *Principio de las casillas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[8] A. Illanes Mejía. *Principios de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[9] Loren C. Larson. *Problem-Solving Through Problems*. Springer-Verlag, 1983.

[10] I. Niven, H. Zuckerman, H. Montgomery. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Wiley, 1991.

[11] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[12] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria avanzada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[13] M. L. Pérez Seguí. Con la colaboración de L. M. García Velázquez y M. Raggi Pérez. *Matemáticas preolímpicas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[14] M. L. Pérez Seguí. *Teoría de números*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[15] A. Rechtman Bulajich, C.J. Rubio Barrios. *Divisibilidad y congruencias*. Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, *Tzaloa* No. 2, 2009.

[16] P. Soberón Bravo. *Combinatoria para olimpiadas internacionales*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[17] L. Shively. *Introducción a la Geometría Moderna*. Compañía editorial continental. México, 1972.